

INSIEMI ORDINATI

Abbiamo visto che il principio del buon ordinamento vale in $\mathbb{N}$ cioè che $\mathbb{N}$ è un insieme **BENE ORDINATO**.
 $(A, \leq)$

Pb: Quando un insieme si dice **BENE ORDINATO**?

DEF: Un insieme **ORDINATO** è un insieme per cui è definita una **relazione d'ordine** cioè una relazione binaria che gode delle proprietà: **RIFLESSIVA**, **ANTISIMMETRICA** e **TRANSITIVA**.

PARZIALMENTE ORDINATO: semplicemente insieme ordinato

TOTALMENTE ORDINATO: $\forall$ due elementi sono sempre confrontabili

$\forall a, b \in A$ si ha $a \leq b$ oppure $b \leq a$

BENE ORDINATO: ogni sottoinsieme (non vuoto) possiede un **minimo elemento** (un minimo)

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$$

$\mathbb{N}$ è l'UNICO **BENE ORDINATO**!

Pb: Perché $\mathbb{Z}$ non è bene ordinato?

Perché si può prendere un sottoinsieme che non ha un minimo
ad esempio $\mathbb{Z}$ stesso, oppure i numeri negativi.

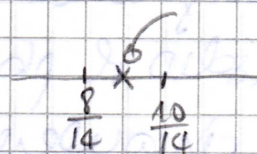
$\mathbb{Z}$ è **totalmente ordinato**!

Anche $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$.

OSS: Tra due razionali ce n'è sempre un altro

ad es tra $\frac{4}{7}$ e $\frac{5}{7}$ c'è $\frac{4}{7} + \frac{1}{14} = \frac{8+1}{14} = \frac{9}{14}$

anzi: $\frac{4}{7} = \frac{8}{14}$
 $\frac{5}{7} = \frac{10}{14}$
 $\frac{8}{14} < \frac{9}{14} < \frac{10}{14}$



Tra due naturali no!

$\mathbb{Q}$ ha una struttura più complessa anche se è equipotente a $\mathbb{Z}$.

Pb: $\leq$ è totalmente o parzialmente ordinato? (rispetto alla norma)

$$z \leq w \stackrel{\text{DEF}}{\iff} |z| \leq |w| \quad \begin{pmatrix} \text{S} & \text{P} & \text{F} \\ \text{A} & \text{O} & \text{I} \\ \text{C} & \text{N} & \text{N} \\ \text{C} & \text{E} & \text{E} \end{pmatrix}$$

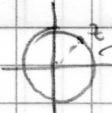
DEF: $z \leq w \wedge |z| \leq |w|$ in matematica è ambiguo perché si potrebbe pensare che valga solo $(\implies)$ ma anche la doppia freccia potrebbe essere fuorviante perché potrebbe sembrare una proprietà equivalente ad un'altra
 $\Rightarrow$ è meglio mettere "x" e pregare che identifichiamo due cose

$\Rightarrow$ DIFFICOLTÀ DELLA MATEMATICA: tenere cose con simboli diversi!

• $|z| \leq |z|$ ok

$$\begin{array}{ccc} z \leq w & \text{e} & w \leq z \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ |z| \leq |w| & & |w| \leq |z| \end{array} \quad \Rightarrow \quad z = w$$

$|z| \leq |\bar{z}|$ e $|\bar{z}| \leq |z|$ ma $z \neq \bar{z} \Rightarrow \text{NO!}$

(altri controesempi  tutti le complessi di norma 1)

$1 \leq -1$ e $-1 \leq 1$ ma $-1 \neq 1!$

$\Rightarrow$ C rispetto alla norma non è neanche parzialmente ordinato

Pb: Con l'ordinamento lexicografico?

DEF: $z \leq w$ $\wedge$ $\begin{matrix} \text{a} < \text{c} & \text{oppure} & \text{a} = \text{c} & \text{e} & \text{b} \leq \text{d} \\ \text{a} < \text{b} & & \text{c} < \text{d} \end{matrix}$

• $a=a$ e $b=b \Rightarrow z \leq z$ ok!

• $z \leq w$ e $w \leq z$
 $\Downarrow$ $\Downarrow$

$\boxed{a < c}$ oppure $\boxed{c < a}$
 oppure CONTRADDIZIONE oppure

$a=c$ e $b \leq d$ e $c=a$ e $d \leq b \Rightarrow a=c$ e $b=d \Rightarrow z=w$ ok!

$$\begin{array}{ccc}
 z \leq z' \text{ e } z' \leq z'' & & \\
 \Downarrow & & \Downarrow \\
 a \leq e & & c \leq e \\
 \text{oppure} & & \text{oppure} \\
 a=e \text{ b} \leq d & & c=e \text{ e } d \leq f \\
 & & \Rightarrow \text{oppure} \Rightarrow z \leq z'' \\
 & & a=e \text{ e } b \leq f \quad ac!
 \end{array}$$

$\Rightarrow$ ordine parziale!

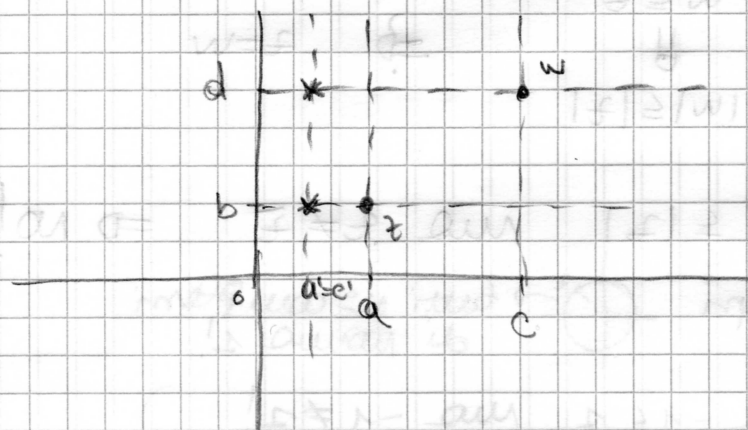
N.B.: Difficoltà della def. data con due alternative.

Ph: È un ordine totale?

$$\begin{array}{ccc}
 (a, b) & & (c, d) \\
 & \swarrow \quad \searrow & \\
 a=c & & b \leq d \\
 & & d \leq b \\
 a \leq c & & dc \\
 c \leq a & & dc
 \end{array}$$

$\Rightarrow$ sì!

NEL PIANO



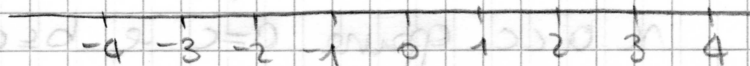
"DIVIDE ET IMPERA"

$$\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$\Rightarrow \mathbb{C} \in$ TOTALMENTE ORDINATO

$$\mathbb{Z}_1^+ = \mathbb{N}$$

$$\{x \in \mathbb{Z}_1 \mid x > 0\}$$



$\Rightarrow \mathbb{Z}_1$ non è bene ordinato ma possiede infiniti sottoinsiemi bene ordinati (che contengono $\mathbb{N}$)

Es: $\{x \in \mathbb{Z}_1 \mid x \geq -100\}$

È bello vedere come succede negli insiemi più grandi e non fermarsi solo a vedere che $\mathbb{Z}_1 > \mathbb{N}$ e che sono equipotenti.

$$\mathbb{Q}^+ = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$$

Pb: $\mathbb{E}$ un insieme bene ordinato? no!

no, per esempio, $q =$ "più" elemento di $\mathbb{Q}^+$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{Q}^+ q \leq x$$

$$\text{ma } 0 < \frac{q}{2} < q \Rightarrow \text{esempio} \quad \text{no}$$

$\mathbb{Z}$ non è bene ordinato rispetto all'ordinamento naturale
ma è bene ordinato rispetto alla relazione d'ordine che
scaturisce dalla corrispondenza biunivoca

$$\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$z \mapsto \begin{cases} 2z+1 & z \geq 0 \\ -2z & z < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{RELAZIONE D'ORDINE} \quad z \leq z' \Leftrightarrow \varphi(z) \leq \varphi(z')$$

$$\text{oss: } \text{Im}(\mathbb{Z}, \leq) \quad \varphi(-2) \quad (2 \leq -2!!!)$$

Pb: Buon ordinamento in $\mathbb{Q}^+$?

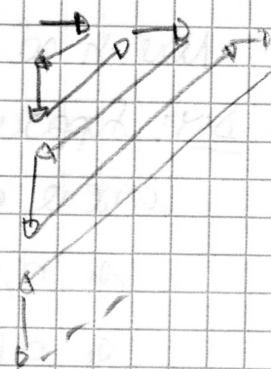
$$\varphi: \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{N} \text{ corrispondenza biunivoca}$$

Introduciamo dunque la relazione d'ordine σ :

$$x \leq x' \Leftrightarrow \varphi(x) \leq \varphi(x')$$

PROCEDIMENTO DIAGONALE DI CANTOR

1	2	3	4	5	6	...
$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{6}{1}$	$\frac{7}{1}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{6}{3}$	$\frac{7}{3}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{7}{4}$
$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{7}{5}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$



$$\Rightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 3 & 4 & \frac{3}{2} & \frac{2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & 5 & 6 & \dots \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & \dots \end{matrix}$$