

Pb: Dove una definizione:

- somma di (uno o) più monomi

↳ un monomio È un polinomio $2x = 2x + 0$

- somme algebraiche ---

SERIE, NON SERIE?

$$\frac{5x^2 - 3x}{5x^2 + (-3x)}$$

- somma di (uno o) più monomi in cui non compaiono termini simili

$\Rightarrow 7x^3 - x + 1x^2 + 5x$ non è un binomio ???

$\Rightarrow$ GATTI ERH!

$\Rightarrow$ POLINOMIO = somma di monomi

È una definizione usata una che si può completare (con l'uso, con il tempo, con la pratica ---)

è una somma algebrica finita e può contenere termini simili

Pb: Cosa non è un monomio?

$\frac{1}{x}$ non è un monomio!

È un quoziente di monomi.

$\Rightarrow$ MONOMIO FRAZIONARIO, FRATTO! $\Rightarrow$ polinomio! bontà

Es: in un libro di testo:

DEF: Somma algebraica di più monomi (non simili tra loro)

monomiale non
necessa nulla:
poi si spiega $7-3 = 7+(-3)$

non fuori che un
monomio non è un
polinomio; è il mon
più grande!

È la definizione più "gettata" nelle scuole italiane!

$\Rightarrow$ NUMERI $\rightarrow$ MONOMI $\rightarrow$ POLINOMI $\rightarrow$ EQ. ALGEBRICHE

$$\sin^6 x + \cos^6 x = 1$$

$$\sin^2 x \cos^2 x = 0$$

$$\sin x \cos x = 0$$

$$\sin x \text{ oppure } \cos x = 0$$

ma si ricorda che è importante
ricordi ad ogni passaggio in potremmo
aggiungere radici: $(x = \pm \pi, x = 1)$

E.B. In un'azienda solitamente c'è sempre una grande cassa di
spese comuni con un muretto pieno in plastica per far
di vista le porte importanti (NEUN TORN!)
Ma è importante nelle matrici!
Bisogna sottolineare il loro significato!

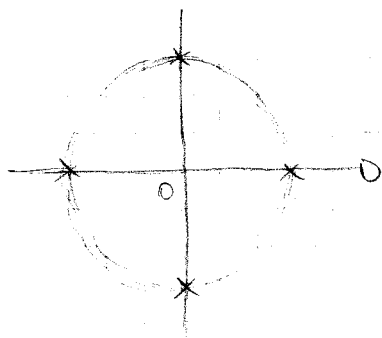
passiamo all'esercizio del compito:

$$\sin^6 x + \cos^6 x = 1$$

abbiamo visto vari modi di risolverlo (conosciamo dell'esercizio
non ho capito)

vediamo un altro modo di risolverlo:

ma invece, più semplice, cerchiamo di scoprire specificamente
alcune delle soluzioni:



per $x=0$ ok!

si vedono subito

$\Rightarrow$ soluzioni banali: $x + \frac{1}{2} = 1$

$$x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, \dots$$

ora facciamo vedere che sono tutte, che non ce ne sono
altre:

e ci sono altre soluzioni dovranno avere le proprietà:

$$0 < \sin^6 x < 1$$

$$0 < \cos^6 x < 1$$

perché quelle che ho visto ad occhio sono già i casi estremi.

$$\text{ma } 0 < \sin^6 x < 1 \Rightarrow 0 < \sin^2 x < 1$$

$$0 < \cos^6 x < 1 \Rightarrow 0 < \cos^2 x < 1$$

$$\text{ma } \sin^6 x < \sin^2 x \quad (\text{sono } < 1)$$

$$\cos^6 x < \cos^2 x$$

$$\text{e } \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\Rightarrow \sin^6 x + \cos^6 x < \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

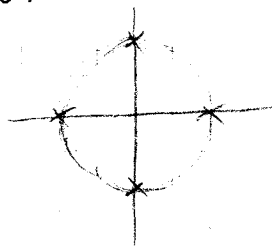
$$\Rightarrow \text{non ci sono altre soluzioni!} \Rightarrow S = \left\{ k \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

S è un ~~ciclo~~ gruppo ciclico generato da $\frac{\pi}{2}$

Un altro generatore? $-\frac{\pi}{2}$

Ce ne sono altri? NO perché è ciclico infinito $\Rightarrow$ sempre a $\mathbb{Z}$
 $\Rightarrow$ solo due generatori.

Guardiamo meglio!



$\Rightarrow$ radici quarta dell'unità $\Rightarrow$ gruppo ciclico:

$$(\mathbb{Z}_4, +) \cong C_4 = \{1, i, -1, -i\}$$

i generatori sono i e $-i$

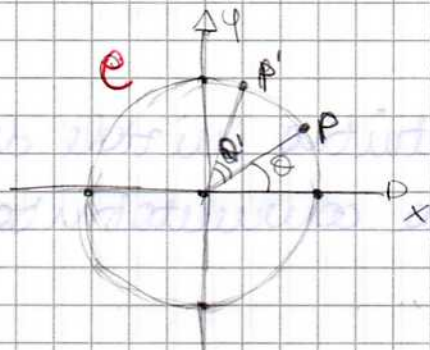
$\Rightarrow$ stesse figure: solo le radici quarta dell'unità,

quando giro e torno n volte in "rotazione" è la stessa

Un gruppo ciclico finito ha solo 2 generatori?

NO!

Es: $(\mathbb{Z}_{83}, +)$ ha 82 generatori



e CIRCONFERENZA UNITARIA di eq $x^2 + y^2 = 1$

È vero che e è un gruppo? sì con la moltiplicazione!

Come mai dire moltiplicare due p.h?

Però associa ad un p.h. l'angolo che forma con l'asse x
 $\Rightarrow$ il prodotto è p'' che corrisponde all'angolo $\theta + \theta'$.

N.B. Stiamo usando la rappresentazione trigonometrica di un numero complesso:

$$p \mapsto (\cos \theta, \sin \theta) \mapsto z = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$p' \mapsto (\cos \theta', \sin \theta') \mapsto z' = \cos \theta' + i \sin \theta'$$

$$p'' \mapsto (\cos(\theta + \theta'), \sin(\theta + \theta')) \mapsto z'' = \cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')$$

$\Rightarrow$ PIANO DI ARGAN-GAUSS

Abbiamo definito un'operazione sui p.h., dobbiamo verificare le chiusure e le tre proprietà!

È un po' fastidioso però possiamo semplificarci la vita

identificando $p \mapsto z = \cos \theta + i \sin \theta$ (FORMA TRIGONOMETRICA)
 $x + iy$ (FORMA ALGEBRICA)

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 1 \text{ diventa } z \bar{z} = 1$$

$\Rightarrow$ l'operazione è il prodotto di numeri complessi

$$\Rightarrow e \subseteq \mathbb{C}^* (\cdot)$$

$\Rightarrow$ una volta che abbiamo visto che e è chiuso rispetto all'operazione abbiamo fatto.

$$z : z \bar{z} = 1$$

$$w : w \bar{w} = 1 \Rightarrow (zw)(\overline{zw}) = 1 \text{ ok!}$$

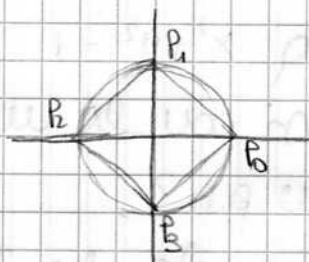
$$w : w \bar{w} = 1$$

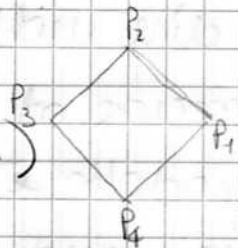
L'insieme è dato gratis!! $z \bar{z} = 1$!!!

È abeliano? Sì!

Si vede sia dalla def intuitiva iniziale dell'operazione ($\theta + \theta' = \theta' + \theta$) sia dalla commutatività dell'operazione in $\mathbb{C}$.

oss: NOTAZIONI

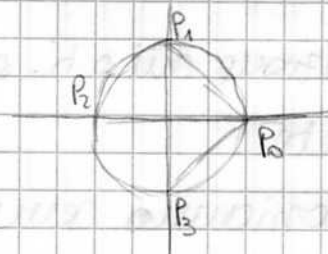


Sarebbe più naturale (geometricamente)  ma nel

piano complesso è più significativo mettere P_1 su i perché è la "monte", lo zero è reale, "inerte".

N.B. Piuttosto che lavorare su una figura poliedrica usala più volte!

Es:



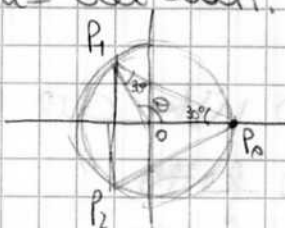
$$x^4 = 1$$

Uniamo P_0 con P_1 , con P_2 e con P_3

$$\overline{P_0 P_1} \cdot \overline{P_0 P_2} \cdot \overline{P_0 P_3} = ?$$

$$\overset{||}{\sqrt{2}} \quad \overset{||}{2} \quad \overset{||}{\sqrt{2}} = 4$$

$\Rightarrow$ è uguale al no dei lati.



$$x^3 = 1$$

Triangolo equilatero inscritto, le cui vertici le radici cubiche dell'unità.

$$\overline{P_0 P_1} \cdot \overline{P_0 P_2} = ?$$

$$\overset{||}{\sqrt{3}} \quad \overset{||}{\sqrt{3}} = 3 \Rightarrow \text{uguale al no dei lati.}$$

$$\angle P_1 O P_2 = \frac{2}{3} \pi = 120^\circ \text{ (si vede dagli angoli di } 30^\circ \text{)} \quad // \text{ oppure: } (z^3 - 1) = (z - 1)(z^2 + z + 1)$$

NUMERI

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \dots$ CONTINUA

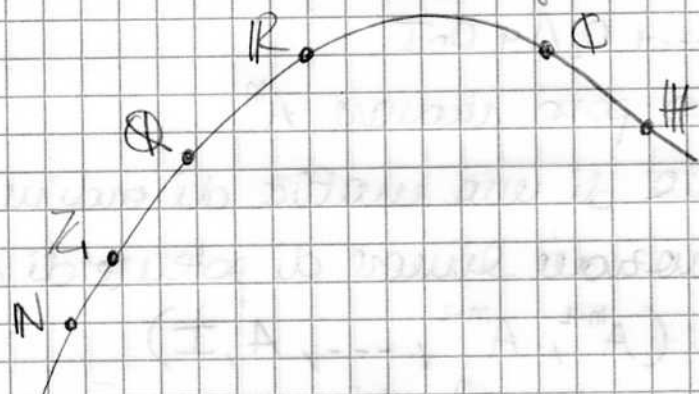
$\dots \subset \mathbb{H} \dots$

(HAMILTON)
↳ QUATERNIONI REALI (corpo, non commutativo)

$\dots$ OTTETTI DI CAYLEY $\dots$

(LONBARDO, RADICE ^{istituzione di Algebra astratta}) FELTRINEU)

$\Rightarrow$



NB: La "distanza" tra un inclusioni e l'altro non è uguale
La difficoltà più grande è il passaggio da $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$!

(HERSTEIN, Algebra)

$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ e $\mathbb{H}$ sono legati da una bellissima proprietà algebrica
($\Rightarrow$ CRISTAL): sono gli unici corpi algebrici sui reali (TED DI FROBENIUS)

FINESTRA

CAYLEY + HAMILTON

$\Rightarrow$ TED DI CAYLEY-HAMILTON: $(C-1)^m$ coeff. direttore $\Rightarrow (C-1)^m / (C-1)^m + \dots$

$\forall A \in M_m(K)$ $P_A(\lambda)$ POLINOMIO CARATTERISTICO

$$P_A(A) = 0$$

oss: ogni matrice quadrata annulla il proprio polinomio caratteristico.

oss: $|A - A| = 0$ è una folse di questo risultato

perché $|0| = 0$ numero

$P_A(A) = 0 \rightarrow$ matrice nulla

TEO DI CAYLEY-HAMILTON e CONSEGUENZE

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \det(A - \lambda I) =$$

$$= (-1)^m \lambda^m + a_{m-1} \lambda^{m-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 (\lambda^0)$$

zona d'ombra
c'è una zona nuda!

$$P_A(A) = (-1)^m A^m + a_{m-1} A^{m-1} + \dots + a_1 A + a_0 \underbrace{A^0}_I$$

⇒ il teo ci dice che

$$0 = (-1)^m A^m + a_{m-1} A^{m-1} + \dots + a_1 A + a_0 I$$

$$\Rightarrow \pm A^m + \dots = 0 \Rightarrow \text{poss. ricavare } A^m$$

I ⇒ la potenza m -esima di una matrice di ordine n si scrive come combinazione lineare di potenze di A di esponente più basso ($A^{m-1}, A^{m-2}, \dots, A, I$)

⇒ A^{m-1} combinazione lineare di $A^{m-2}, A^{m-3}, \dots, A, I$

⇒ combinazione lineare di $A^{m-2}, A^{m-3}, \dots, A, I$

⇒ tutte le potenze di una matrice quadrata di ordine n sono combinazione lineare delle potenze di A : $A^{m-1}, A^{m-2}, \dots, A, I$.

⇒ Basta calcolare le potenze di A con esponente $0 \leq r \leq m-1$ per conoscere tutte le potenze di A

CASO PARTICOLARE: $m=2$ tutte le potenze di A sono combinazione lineare di A e I .

II Grazie a questo risultato facilita il calcolo dell'inversa di una matrice invertibile.

Sappiamo $A \in M_n(K)$ invertibile

$$\Rightarrow \exists A^{-1} \in M_n(K)$$

$$\text{se } \lambda=0 \quad P_A(0) = |A| = a_0$$

$$\Rightarrow \text{se } A \text{ è invertibile } a_0 \neq 0$$

$$\Rightarrow I = \text{combinazione lineare di } A, A^2, \dots, A^m$$

diviso per a_0

FREE! $A^{-1} = \text{combinazione lineare di } I, A, \dots, A^{m-1}$

Es: $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \quad |A| = 21 - 10 = 11$

$$(3-\lambda)(7-\lambda) - 10 = 21 - 7\lambda - 3\lambda - \lambda^2 - 10 = \lambda^2 - 10\lambda + 11$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 10\lambda + 11 = 0$$

$$\Rightarrow 11 = 10A - A^2 \quad ; \quad I = \frac{10}{11}A - \frac{1}{11}A^2$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{10I}{11} - \frac{1}{11}A = \begin{pmatrix} \frac{10}{11} & 0 \\ 0 & \frac{10}{11} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{3}{11} & \frac{5}{11} \\ \frac{2}{11} & \frac{7}{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{11} & -\frac{5}{11} \\ -\frac{2}{11} & \frac{3}{11} \end{pmatrix}$$

PROVA: $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{7}{11} & -\frac{5}{11} \\ -\frac{2}{11} & \frac{3}{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{21}{11} - \frac{10}{11} & \frac{-15}{11} + \frac{15}{11} \\ \frac{14}{11} - \frac{14}{11} & \frac{-10}{11} + \frac{21}{11} \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ok.}$$

III Caratterizzazione delle matrici nilpotenti:

Es: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0 \quad A^2 \neq 0 \quad A^3 = 0$

Quando è che il polinomio caratteristico è il più semplice possibile? $P_A(\lambda) = (-1)^m \lambda^m$

$\Leftrightarrow$ la matrice è nilpotente

Oss: $A^m = 0$ è quasi

$(\Rightarrow)$ offensivo

$(\Leftarrow)$ un po' più interessante.

Es: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad P_A(\lambda) = -\lambda^3$

Es: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 \text{ si annulla su } A$

$\Rightarrow$ concetto di polinomio minimo che si annulla

Quindi:

dal teorema di Cayley - Hamilton:

$\exists$ di un polinomio di grado n che si annulla su A
oppure, da un altro p.to di vista:

$\exists$ un intero positivo m e un polinomio di grado m che si annulla su A

$\Rightarrow$ passaggio dai polinomi agli esponenti:

$\Rightarrow \exists$ del polinomio minimo

Ma chi ci garantisce che possiamo scegliere al di sotto di n ?

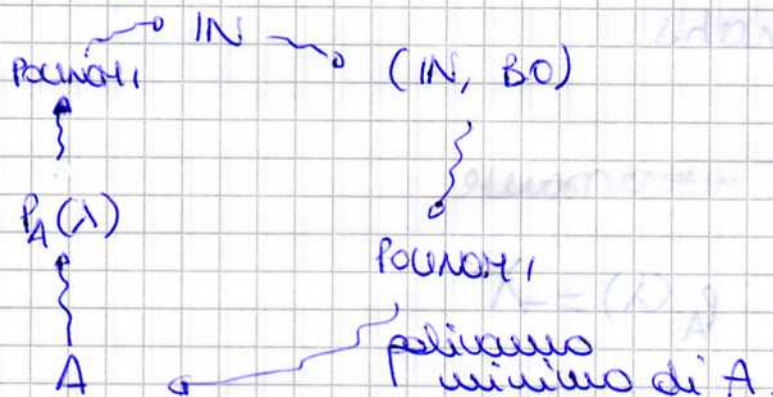
PRINCIPIO DEL MINIMO $\leadsto$ sui naturali

PRINCIPIO DEL BUON ORDINAMENTO
($\mathbb{N}$ è l'unico ad avere questa proprietà)
 $\hookrightarrow$ sotto cui sottoinsieme
 $\Rightarrow$ c'è sempre un minimo

$X = \{d \in \mathbb{N} \mid \exists \text{ un polinomio } f(x) \text{ di grado } d \text{ che si annulla su } A\}$

$\Rightarrow$ Il teo di CAYLEY-HAMILTON ci dice che X non è vuoto.

$\Rightarrow$ per il principio del buon ordinamento trova il polinomio di grado minimo



MASSIMI e MINIMI

La nozione di minimo è più importante in matematica di quella di massimo (la natura lo avverte con il principio del minimo -- alberi, fiori --)

Es. Anche il MCD è un minimo: $\text{MCD}(a, b)$ $a, b \in \mathbb{N}$.

- quando visto e calcolato con l'algoritmo euclideo è il più piccolo resto non nullo!

- è il minimo pensando alla fattorizzazione nei primi (TFA) (ricordiamo i fattori con esponente minimo)

ma anche dal p.to di vista operativo?

Qualche il principio del minimo riferito al MCD ci tocca anche attraverso SETOUT:

$\text{MCD}(a, b)$ è il più piccolo intero naturale che si può scrivere come combinazione lineare di a e b .

$$\Rightarrow \text{MCD}(a, b) = ma + nb \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

N.B. COMBINAZIONE LINEARE: abbinare due operazioni insieme + e -.

Massimi e minimi viaggiano insieme:

- $a \leq b$ si legge da entrambi le parti

- MCD legato alla nozione di minimo che $\mathbb{N}$ = massimo.

Es: Considero due p.ti a e b in una sfera

Qual è il percorso di minima distanza tra a e b ?

(rimanendo sulla superficie)

Il piano tangente per a e b sgherisce le sfere nella circonferenza massima

$\Rightarrow$ risolvo il pb della minima distanza rimanendo alla circonferenza massima.