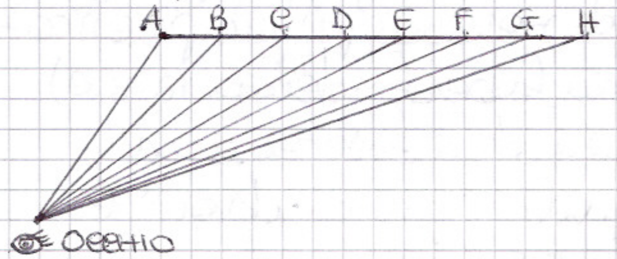
Mart. 9 Genn. - SM - Ghione - LEZ. 4

Informazioni sul sito: WWW. MAT. UNIROMA2. IT/MEP/

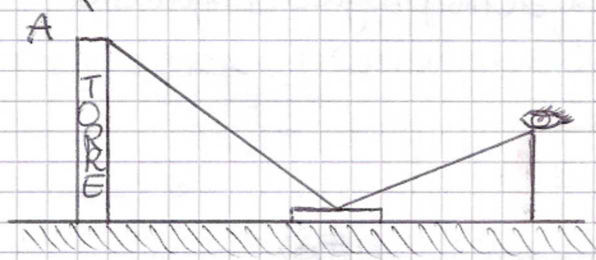
"Le Geometrie della visione" di Laura Catastini e Franco Ghione - - Springer. In generale, affrontare qualunque argomento di storia della matematica prevede di infarcire le nozioni più prettamente storiche con le conoscenze di matematica e, quindi, l'impostazione analitica di un problema matematico! Ad esempio: nella storia della matematica, Euclide, Menelao, Alberti e Piero della Francesca possono essere considerati le fonti per i problemi geometrici fondamentali. E', ad esempio, il contributo di Alberti che, storicamente fissò le regole e le proprietà della Prospettiva (L. B. Alberti - De Pictura - ~ 1420 - Libro III). Alberti, in questo trattato, vede, nella conoscenza della Geometria, una conoscenza sine qua non per approfondire la ricerca nella pittura. Osserviamo che il ricorso alle fonti, permette di andare alle basi della storia su determinati argomenti; riuscendo spesso, in questo modo, a trovare ed esaltare punti di connessione con altre discipline. In questo caso, sia

il disegno, che le lettere (in quanto i testi, spesso, sono scritti in Greco, Latino o italiano volgare). Altro esempio molto importante è il libro sull'ottica di Euclide. Esistono delle edizioni ipertestuali degli "elementi" di Euclide, che presentano dei disegni animati (in java) sui quali si può operare per capire meglio come sono applicabili i teoremi. Nel seguente sito si possono vedere disegni
http://ALEPH0 (ZERO). CLARKU.EDU/~DJOYCE/JAVA/ELEMENTS/BOOKI/
/BOOKI.HTML
come questo:



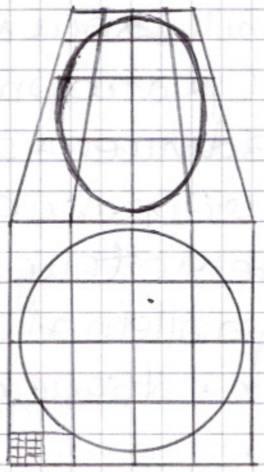
se ho segmenti uguali e c'è un occhio che li osserva, allora l'occhio vede più grande quello più vicino a lui.

Queste animazioni hanno, ovviamente una grande utilità dal punto di vista didattico. Un'altra animazione è la seguente:



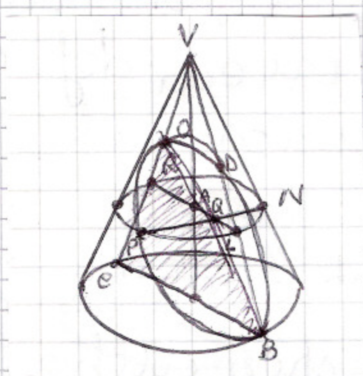
per calcolare l'altezza di una torre, si pone uno specchio a terra e lo si muove finché l'occhio non vede riflesso il vertice A della torre stessa. A questo punto, poiché i due angoli sono uguali, se ne deduce che i due triangoli sono simili e quindi si può, facilmente, calcolare l'altezza della torre.

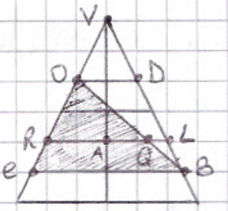
CONI CIRCOLARI E LORO SEZIONI. Vediamo ora una trattazione sulle sezioni coniche. Nel CD, visto in classe, c'è la rappresentazione del compasso parabolico; sarebbe interessante poterlo costruire in classe. Nel sito trovate questo INDICE: - Rappresentazioni prospettiche di una circonferenza; - L'impostazione teorica di Apollonio. - Strumenti reali e strumenti virtuali; ecc. ecc. Mentre Alberti, nel De Pictura, propone metodi empirici per le arti pittoriche, quindi problemi sulla prospettiva, Piero della Francesca scrisse un vero e proprio trattato di matematica, nello stile di Euclide, cioè basato su una struttura logico-deduttiva. Entrambi si posero il problema di come disegnare un'ellisse. Su idea di Piero della Francesca, Alberti propose di risolvere questo problema trovando una curva piana che potesse essere approssimata ad uno scorcio di circonferenza; introdusse, così, l'approssimazione del cerchio con dei piccoli quadrati, che, poi, viene trasformato prospetticamente a partire dal particolare punto di vista. Questo era un metodo pratico per descrivere un'ellisse.



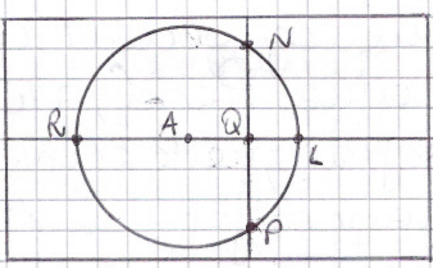
PIANO ALBERTIANO

Quindi, Alberti usò il metodo della quadrettatura; più piccoli saranno i quadretti e più precisa sarà la costruzione. Alberti era del parere che fosse meglio trasformare la quadrettatura che il cerchio. Questa è l'idea base da cui nasce il piano albertiano. Vi ricordo che il piano, in Euclide, non esisteva; ci sono solo gli oggetti matematici: il quadrato, il cerchio, il triangolo, ecc. ecc. Cioè Euclide studiava gli oggetti geometrici senza dare dignità di oggetto matematico all'ambiente che lo ospita. Alberti, invece, considerava lo spazio come se fosse un pavimento. Una volta fatta questa piastrellatura dello spazio, Alberti indica l'oggetto dicendo su quale mattonella si trova. Quindi dà delle regole precise per trasformare il piano a seconda del punto di vista. Questa è un'idea fondamentale per tutti i settori delle scienze. È lo stesso metodo che, poi, Cartesio riprenderà con i numeri e che sarà alla base della moderna analisi differenziale. Pascal, vissuto nella 2ª metà del 1600, era allievo di un grandissimo matematico francese, uno dei più geniali; Desargues che ha dato un luogo geometrico all'infinito spaziale, creando la geometria proiettiva. Pascal, a 16 anni, scrisse un trattato sulle coniche, in cui definì queste curve a partire dalla rappresentazione prospettica di una circonferenza. La trattazione di Pascal dava la soluzione teorica di come tracciare una conica conoscendo solo la posizione di 5 suoi punti; questo è un metodo fondato sul celebre teorema dell'esagono mistico. Su questo teorema di Pascal si basano, oggi, le tecniche di grafica al computer per costruire una conica con 5 punti. Pascal, in realtà, aveva sentito un manifesto. A quei tempi, i manifesti venivano, poi, affissi sui muri delle città. In alcuni casi erano anche manifesti molto offensivi; come, ad esempio, quelli contro Desargues. E, poi, dopo averlo sentito, Pascal si dedicò interamente a studi di carattere filosofico-religioso. Il manifesto di Pascal fu conservato da Leibniz. Secondo ciò che riferisce Leibniz, Pascal si occupò di coniche e pensava che la conica fosse l'immagine di un cerchio. Questo è metaforico, la visione è sempre davanti. Desargues aveva il problema di unire i due lati. Gli estremi, andandosi a toccare, fanno saltare la metrica e l'intuizione spaziale. In tempi recenti hanno dimostrato che, il piano proiettivo reale non può essere immerso nello spazio a 3 dimensioni, senza che si pieghi su se stesso. Quindi, le coniche appaiono come visioni del cerchio. Le ellissi, in particolare, si ottengono sezionando un cono con un piano che non sia parallelo ad una generatrice del cono; di modo che, l'oggetto che si ottiene, è un oggetto che possa chiudersi. Apollonio aveva fatto un'esauriente costruzione delle coniche attraverso la sezione di un cono con un piano. Basta prendere una sezione con un angolo $\beta < 90°$ da un'ellisse, un punto qualunque P dell'ellisse ed un piano parallelo alla base che sezioni il cono e che passi per P. La difficoltà è che, così si trovano 3 piani:

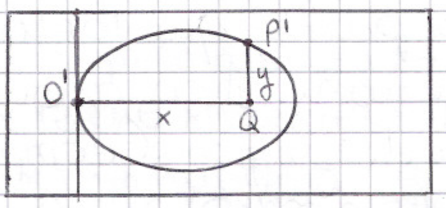




il primo è il PIANO ASSIALE, cioè quello che seziona il cono lungo il suo asse e contiene il triangolo $\triangle OEB$;



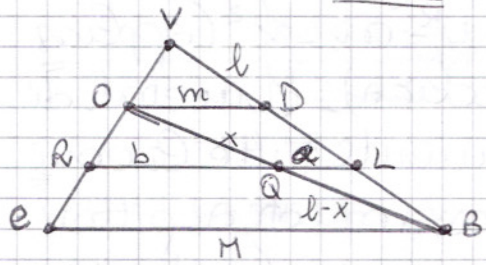
il secondo è quello parallelo alla base, dove è tracciata la circonferenza che passa per il punto P;



il terzo è il piano in cui è tracciata l'ellisse.

Muovendo il punto A si può cambiare l'altezza con cui si seziona, quindi, si generano coniche diverse. Cambiando la forma del triangolo $\triangle OEB$, assieme alla pendenza trasversale, si cambia la conica. Per Apollonio: $OQ = x$ è detta ascissa e $PQ = y$ è detta ordinata. Proiettando le variazioni nel triangolo in sezione, si ottengono tutte le condizioni della conica. Ragionando sulle pro

prietà dei triangoli; definiti nel triangolo assiale, formato dalle proiezioni delle intersezioni si ha:
nel caso delle ellissi (da cui l'etimologia "togliere"):

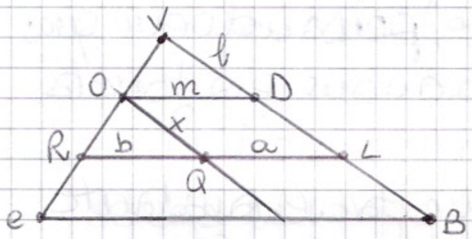


$$\frac{a}{l-x} = \frac{m}{l} \quad e \quad \frac{b}{x} = \frac{M}{l}$$

moltiplicando le due espressioni ottengo:

$$\boxed{y^2 = \frac{mM}{l^2} \cdot x(l-x)} \quad \text{ELLISSE}$$

La costante che moltiplica il fattore $x(l-x)$ dipende solo dai dati del problema. L'espressione che abbiamo trovato è della massima importanza perché permette di calcolare, data l'ascissa x, un'ordinata y che descrive la nostra conica.
nel caso della parabola (quando non faccio nulla):



$$a = m \quad e \quad \frac{b}{x} = \frac{m}{l}$$

moltiplicando le due espressioni ottengo:

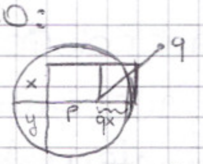
$$\boxed{y^2 = \frac{m^2}{l} \cdot x} \quad \text{PARABOLA}$$

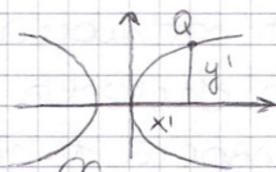
nel caso dell'iperbole (quando aggiungo qualcosa):

$$\boxed{y^2 = \frac{mM}{l^2} \cdot x(l+x)}$$

ESERCIZIO: se poniamo $m=4$ e $l=4$ viene questo cono.
Lo faremo a laboratorio. Posso dire a questo punto che, se p è un parametro fissato, che posso modificare, dati p, q e x, posso costruire tutto e ho la costruzione delle coniche di Apollonio:

$$x : y = y : (p+qx)$$
$$y^2 = x(p+qx)$$



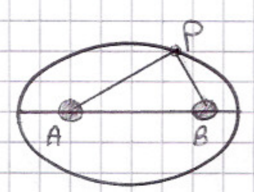


Da qui la definizione generale delle coniche di Apollonio:
Def: detta x l'ascissa, l'equazione della conica è:

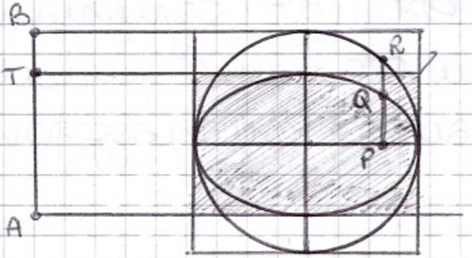
$$y^2 = px + qx^2$$

dove se $q<0$ ho l'ellisse (tolgo qualcosa);
se $q=0$ ho la parabola (non tolgo nulla);
se $q>0$ ho l'iperbole (aggiungo qualcosa.
I termini con cui Apollonio chiama le coniche sono diversi da quelli dei suoi predecessori e fanno riferimento agli studi pitagorici delle "applicazioni delle aree". Questo è un tema che

vedremo nel corso del 2° anno del prof. Ghione. Ad esempio: dato un segmento a ed un quadrato y^2, si tratta di applicare a quel segmento, un altro segmento x t.c. $ax = y^2$ (e questa si chiama applicazione parabolica); oppure t.c. $y^2 = ax - x^2$ (applicazione ellittica); $y^2 = ax + x^2$ (applicazione iperbolica). I metodi di Apollonio permettono di disegnare correttamente tutte le coniche. Ma non sappiamo se questi metodi fossero noti ai pittori del Rinascimento. Leonardo propose un compasso: l'idea era quella di inclinare l'asse del compasso e mantenere il foglio su un piano orizzontale. Successivamente, per realizzare questo compasso parabolico, venne messo un peso sull'asse del compasso in modo da inclinarlo per gravità. Luoghi del giardiniere: proprietà metriche di ellissi ed iperboli. L'ellisse viene spesso definita "luogo del giardiniere", pensando che questa potesse essere la via più semplice. Questa opinione era dovuta alla diottrica. Cartesio (contemporaneo di Desargues e di Pascal) fece una matematica e una geometria che facilitava tante cose. La geometria di Cartesio è semplicemente l'esposizione di un metodo. Nella fine del libro di Cartesio si risolve il PROBLEMA DI PAPPO: "date 6 rette giacenti su di un piano, una curva è determinata dalla condizione che il prodotto delle distanze da 3 delle rette abbia un rapporto fisso con il prodotto delle distanze delle altre 3". Viene, quindi, un'equazione di 2° grado e Cartesio dimostra che è una conica. Cartesio era talmente entusiasta di questo suo metodo che disse che, secondo lui, i posteri gli sarebbero stati grati per non aver detto delle cose solo per il piacere di farlo fare a loro! In realtà, noi crediamo che Cartesio abbia detto tutto ciò che sapeva. La matematica sintetica andò in ombra e, tutta la scienza successiva a Cartesio, fu completamente influenzata dalla sua geometria. A laboratorio faremo anche il metodo del



giardiniere che consiste nel tendere una corda lunga tra due pali A e B fissati. Questa è un'animazione molto semplice. Ma si può anche vedere l'ellisse come uno schiacciamento della circonferenza, dove c'è un rapporto fissato. Così si può



calcolare l'area dell'ellisse. Notando l'area del cerchio si ottiene da quella dell'ellisse moltiplicando per questo fattore, ma qualunque altra figura, tramite un'affinità, ha la medesima proprietà. Questa è una delle proprietà più importanti della affinità. L'ordinata del punto P viene contratta di un valore fisso dato da: $AT : AB = b \div a$. L'ellisse è ottenuta da affinità della circonferenza. La dimostrazione che fosse veramente un'ellisse venne fatta da Archimede, che usò questo metodo per calcolare l'area dell'ellisse. Didatticamente, i problemi sulla quadratura proposti da Archimede possono essere molto utili per mostrare quelle che sono state, poi, le metodologie per i fondamenti dell'analisi, sviluppati successivamente, e per introdurre, ad esempio, il calcolo integrale.

Il tema del compito dell'anno scorso era del tipo: "Lo specializzando scelga un argomento di carattere storico e, su quello, articoli una lezione di 2 ore in un contesto scolastico di sua scelta, motivando didatticamente le sue scelte". Quest'anno sarà simile.