

ALGEBRA - ESERCIZI DI AUTOVALUTAZIONE

19 maggio 2005

1. Dimostrare che i gruppi (C_6, \cdot) e $(\mathbb{Z}_6, +)$ sono isomorfi e determinare tutti gli isomorfismi che possono essere stabiliti fra tali gruppi.
2. Generalizzare l'esercizio precedente al caso dei gruppi (C_n, \cdot) e $(\mathbb{Z}_n, +)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

3. Determinare tutti i sottogruppi del gruppo \mathbb{Z}_{18} le relative unioni e intersezioni, disegnare il reticolo di tali sottogruppi.

Verificare inoltre se esistono coppie di sottogruppi H e K tali che risulti:

$$\mathbb{Z}_{18}/H \cong K.$$

4. Determinare la struttura dei gruppi (\mathbb{U}_{22}, \cdot) e (\mathbb{U}_{42}, \cdot) scrivendoli, se possibile, come prodotto diretto di due opportuni sottogruppi.

Verificare inoltre se è possibile determinare un omomorfismo non banale di dominio \mathbb{U}_{22} e codominio \mathbb{U}_{42} ed un omomorfismo non banale di dominio \mathbb{U}_{42} e codominio \mathbb{U}_{22} .

In caso di risposta affermativa esplicitare uno di tali omomorfismi.

5. (a) Scrivere le seguenti permutazioni di (\mathcal{S}_9, \circ) come prodotto di cicli disgiunti, stabilirne la classe (pari o dispari), determinarne l'ordine e l'inversa:

$$\sigma = (3452) \circ (24987) \circ (159)$$

$$\tau = (12) \circ (3765) \circ (21) \circ (9876)$$

- (b) detta $\sigma' = (3452) \circ (24987)$ determinare una permutazione x che risolva l'equazione $x \circ \sigma' = \sigma$.
- (c) Scrivere, se possibile, σ come prodotto di 11 trasposizioni e τ come prodotto di 2 trasposizioni.
- (d) Determinare quali sono gli elementi di \mathcal{S}_9 di ordine sei e classe pari.
- (e) Calcolare i due prodotti $(\sigma \circ \tau)$ e $(\tau \circ \sigma)$ e stabilire se questi due prodotti sono elementi tra loro coniugati.