ALGEBRA - ESERCIZI DI AUTOVALUTAZIONE

5 maggio 2005

1. Determinare la decomposizione in irriducibili in $\mathbb{Q}[x]$ del polinomio $f(x) = x^{24} - 1$. Detta ζ una radice primitiva 24-esima si determini la partizione dell'insieme delle radici 24-esime dell'unità relativa alla seguente relazione di equivalenza:

   $\zeta^i \rho \zeta^j \iff \zeta^i$ e ζ^j annullano lo stesso fattore irriducibile di $f(x)$.

2. Determinare esplicitamente nei seguenti gruppi, quando possibile, almeno un elemento g, diverso dall'elemento neutro, di ordine finito:

   $G_1 = (\mathbb{Z}, +),\ G_2 = (\mathbb{C}^*, \cdot),\ G_3 = (\mathbb{Q}, +),\ G_3 = (\mathbb{Q}^*, \cdot),\ G_5 = (\mathcal{C}_{34}, \cdot).$

3. Nel gruppo $((\mathbb{Z}_{15}, +)$ verificare se i seguenti sottoinsiemi sono o meno sottogruppi:

   $H = \{\overline{0}, \overline{7}, \overline{8}\},\ K = \{\overline{0}, \overline{5}, \overline{10}\},\ T = \{\overline{4}, \overline{8}, \overline{12}\},\ S = \{\overline{0}, \overline{6}, \overline{12}, \overline{3}, \overline{9}\}$

   nel caso in cui non si tratti di sottogruppi si spieghi quale condizione viene a cadere.

4. Dato un gruppo $(G, \cdot)$ dimostrare che esso è commutativo se, e solo se:

   $$\forall\, a, b \in G \ \text{ risulta } (a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$$

5. Scrivere le tabelle moltiplicative dei gruppi degli invertibili di $\mathbb{Z}_{24}$ e di $\mathbb{Z}_{16}$ e la tabella additiva del gruppo $\mathbb{Z}_8$; verificare se tali tabelle corrispondono allo stesso tipo di gruppo (ovvero verificare se tali gruppi sono isomorfi). Nei casi possibili costruire un isomorfismo.

6. Descrivere il gruppo moltiplicativo $G = C_{12}$ delle radici dodicesime dell'unità; verificare che G è isomorfo al gruppo additivo $\mathbb{Z}_{12}$ descrivendo esplicitamente un isomorfismo fra i due gruppi.

7. Verificare che, definendo in $\mathbb{Z}$ la seguente operazione:

   $$h \star k = \begin{cases} h + k & \text{se} \quad h = 2h' \\ h - k & \text{se} \quad h = 2h' + 1 \end{cases}$$

   risulta che $(\mathbb{Z}, \star)$ è un gruppo non commutativo.