

ALGEBRA - ESERCIZI DI AUTOVALUTAZIONE

28 aprile 2005

1. Scomporre in fattori irriducibili in $\mathbb{Z}[i]$ gli elementi 15 e $2 + 4i$ e trovare in $\mathbb{Z}[i]$ il loro massimo comun divisore.
2. Fattorizzare in irriducibili su \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} i seguenti polinomi:
 $x^5 - 1$, $\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1$, $x^3 + 2x + 1$, $x^4 - 2x^2 - 8x - 3$.
3. Considerata l'applicazione: ψ da $\mathbb{Q}[x]$ a \mathbb{R} definita al modo seguente: $\psi(f(x)) = f(3 + \sqrt{2})$ si chiede di:
 - (a) verificare che ψ è un omomorfismo di anelli;
 - (b) determinare l'insieme I di tutti gli elementi $f(x)$ di $\mathbb{Q}[x]$ tali che $f(3 + \sqrt{2}) = 0$;
 - (c) trovare in I un polinomio non nullo $p(x)$ di grado minimo;
 - (d) Verificare che la relazione di equivalenza in $\mathbb{Q}[x]$ indotta dall'applicazione ψ è la congruenza modulo $p(x)$;
 - (e) descrivere $Im\psi$;
 - (f) trovare in $Im\psi$ l'inverso dell'elemento $\psi(x^4 - 3x + 1)$.
4. Studiare la struttura dell'anello $A = \mathbb{Z}_5[x] / \langle x^2 + \bar{2}x + \bar{2} \rangle$ determinandone:
 - (a) la cardinalità,
 - (b) l'insieme degli elementi invertibili,
 - (c) l'insieme degli elementi non invertibili,
 - (d) l'insieme degli eventuali divisori dello zero.

Verificare inoltre che l'elemento $\overline{x^3 + x^2 + x - \bar{1}}$ è un elemento invertibile in tale anello e determinarne l'inverso.

5. Dimostrare che un numero naturale di tre cifre

$$n = a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0 10^0, \quad a_i \in \{0, \dots, 9\} \text{ e } a_2 \neq 0$$

è divisibile per 8 se, e solo se, $a_2 = 2t$ e $a_1 10^1 + a_0 10^0$ è divisibile per 8, oppure $a_2 = 2t + 1$ e $a_1 10^1 + a_0 10^0$ è divisibile per 4 ma non per 8.

Generalizzare dando la condizione per cui

$$n = \sum_{i=0}^n a_i 10^i, \quad a_i \in \{0, \dots, 9\} \text{ e } a_n \neq 0$$

sia divisibile per 2^{n+1} .