

ALGEBRA - ESERCIZI DI AUTOVALUTAZIONE

7 aprile 2005

1. Calcolare, esibendo l'insieme degli elementi coprimi con n , la funzione di Eulero di n , per $n \in \{42, 16, 36\}$; verificare la moltiplicatività della funzione di Eulero per tali casi. In particolare, se

$$U = \{u : 1 \leq u \leq 4, (u, 4) = 1\}, \quad V = \{v : 1 \leq v \leq 9, (v, 9) = 1\}$$

e

$$W = \{w : 1 \leq w \leq 36, (w, 36) = 1\},$$

stabilire la biiezione fra $U \times V$ e W indotta dal sistema di congruenze:

$$\begin{cases} x \equiv u \pmod{4} \\ x \equiv v \pmod{9} \end{cases} .$$

2. Dire sotto quale condizione un elemento è invertibile nell'insieme \mathcal{Q}_5 dei 'quaternioni' che hanno coefficienti nel campo \mathbb{Z}_5 , ovvero:

$$\mathcal{Q}_5 = \{\bar{a} + \bar{b}i + \bar{c}j + \bar{d}k : \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d} \in \mathbb{Z}_5, i^2 = j^2 = k^2 = -\bar{1}, i \cdot j = k\}.$$

In particolare determinare quali fra i seguenti elementi sono invertibili e quali sono divisori dello zero individuando, per i primi, l'inverso e per i secondi un elemento che moltiplicato per l'elemento di partenza fornisca come risultato lo zero:

$$\bar{1} + \bar{2}i + \bar{2}j + \bar{4}k, \bar{2} + \bar{3}i + \bar{0}j + \bar{1}k, \bar{1} + \bar{3}i + \bar{4}j + \bar{3}k, \bar{3} + \bar{2}i + \bar{2}j + \bar{3}k$$

3. Nell'anello $A = (\mathbb{Z}_{20}, +, \cdot)$ determinare tutti gli elementi invertibili e calcolarne gli inversi; verificare poi che tutti gli elementi non invertibili, diversi da zero, sono divisori dello zero.

Determinare tutti i sottoanelli di A verificando se essi sono o meno privi di zero divisori; verificare inoltre se si tratta di sottoanelli dotati di unità (fare attenzione a questo punto).

4. Calcolare, con l'algoritmo presentato a lezione, gli interi di Gauss q e r che siano quoziente e resto nella divisione fra i seguenti due interi di Gauss:

$$z = 6 - 5i, \quad w = -2 + 9i.$$

Verificare se è possibile determinare altri due interi di Gauss q' e r' che siano quoziente e resto nella divisione fra gli stessi z e w .