ALGEBRA - ESERCIZI DI AUTOVALUTAZIONE

31 marzo 2005

1. Dimostrare che, $\forall\ n \in \mathbb{Z}$ risulta:
$$n^3 - 1 \equiv a \bmod 7, \text{ con } a \in \{0, 5, 6\}.$$

2. Dimostrare, usando il teorema fondamentale dell'aritmetica, che:
$$\forall \quad a, b \in \mathbb{Z}, \quad \sqrt{7} \neq \frac{a}{b}$$
ovvero che $\sqrt{7}$ non è un numero razionale.

3. Risolvere il seguente sistema:
$$\begin{cases} 4783x & \equiv & -821 & \bmod & 9 \\ 547x & \equiv & 73 & \bmod & 7 \\ 34x & \equiv & -2 & \bmod & 8 \end{cases}$$

4. Determinare per quali valori del parametro k ha soluzione il seguente sistema:
$$\begin{cases} 3x & \equiv & 2 & \bmod & 4 \\ 5x & \equiv & k & \bmod & 6 \\ 7x & \equiv & 1 & \bmod & 9 \end{cases}$$

5. Determinare le soluzioni delle seguenti congruenze:
$$4^{2546} \equiv x \bmod 5 \text{ e } 17^{3342} \equiv x \bmod 7 .$$

6. Costruire l'insieme $\mathbb{U}_{21}$ e verificare che esso è un gruppo rispetto all'operazione di moltiplicazione fra classi. In particolare si determinino gli inversi per ciascun elemento.

7. Trovare i divisori dello zero dell'anello $(\mathbb{Z}_{36}, +, \cdot)$.

8. Verificare se l'applicazione:
$$\begin{array}{rccc} \alpha & : \mathbb{Z}_{15} & \longrightarrow & \mathbb{Z}_5 \\ & \overline{a} & \longrightarrow & \tilde{a} \end{array}$$
è ben definita. In caso di risposta affermativa determinare la relazione di equivalenza e la partizione associata. Verificare inoltre se si tratta di un omomorfismo di anelli.

9. Ripetere l'esercizio precedente relativamente all'applicazione:
$$\begin{array}{rccc} \alpha & : \mathbb{Z}_{5} & \longrightarrow & \mathbb{Z}_{15} \\ & \tilde{a} & \longrightarrow & \overline{a} \end{array} .$$