

ALGEBRA - ESERCIZI DI AUTOVALUTAZIONE

17 marzo 2005

1. Dimostrare, utilizzando il principio di induzione, che vale la seguente eguaglianza:

$$\sum_{k=1}^n (k \cdot (k+1) \cdot (k+2)) = 6 \binom{n+3}{4}$$

2. Siano S un insieme non vuoto, f e g due funzioni di dominio e codominio uguale a S tali che $f \circ g = g \circ f$; dimostrare per induzione (doppia) che, $\forall n, m \in \mathbb{N}$, risulta $f^n \circ g^m = g^m \circ f^n$.
3. Nell'insieme \mathbb{Z} dei numeri interi si definisca la relazione:

$a\rho b \iff a$ e b hanno lo stesso quoziente nella divisione per 7

- (a) si verifichi che ρ è una relazione di equivalenza,
- (b) si determini l'insieme quoziente, esplicitando almeno una classe di equivalenza,
- (c) si definisca la proiezione canonica π
- (d) si verifichi tramite un esempio che, se $[a], [b] \in \mathbb{Z}/\rho$, non sono ben definite le operazioni:

$$[a] + [b] = [a + b] \text{ e } [a] \cdot [b] = [a \cdot b].$$

4. Determinare il massimo comun divisore d fra gli interi -1105 e 3519; trovare poi due interi r e s tali che risulti:

$$d = (-1105, 3519) = (-1105)r + 3519s$$

5. Calcolare, quando possibile, una soluzione per le seguenti equazioni diofantee:

$$14x + 23y = 12, \quad 14x + 24y = 12,$$

$$14x + 24y = 9, \quad 15x + 24y = 9.$$

6. Un vinaio, oltre alla botte in cui tiene il vino, ha solamente due recipienti, uno da 15 litri ed uno da 18 litri. Due clienti vanno ad acquistare rispettivamente 6 e 8 litri di vino; potrà il vinaio soddisfare le loro richieste? Nel caso sia possibile spiegate come.