

ALGEBRA - ESERCIZI DI AUTOVALUTAZIONE

10 marzo 2005

1. Nell'insieme $A = \{a, b, c, d, e\}$ definire a piacere una relazione ρ_1 che goda della sola proprietà riflessiva, una relazione ρ_2 che goda della sola proprietà simmetrica e una relazione ρ_3 che goda della sola proprietà transitiva.

Definire poi tre relazioni ρ_4, ρ_5, ρ_6 che godano solamente di due fra le proprietà precedenti.

Infine determinare una relazione di equivalenza ρ_7 su A .

2. Sia $M(2, \mathbb{R})$ l'insieme delle matrici 2×2 a coefficienti nell'insieme dei numeri reali \mathbb{R} e sia ρ la relazione ivi definita al modo seguente:

$$\forall A, B \in M(2, \mathbb{R}), A \rho B \Leftrightarrow A - B \in M(2, \mathbb{Q})$$

\mathbb{Q} l'insieme dei numeri razionali. Dimostrare che ρ è una relazione di equivalenza e descrivere l'elemento generico della classe di equivalenza dell'elemento

$$C = \begin{pmatrix} \pi & \sqrt{2} \\ 0 & \frac{5}{3} \end{pmatrix}.$$

3. Considerati gli insiemi $A = \{1, 2, \dots, 20\}$, dei naturali compresi fra 1 e 20, e $B = \mathbb{Z}$ si definisca la seguente funzione:

$$f : A \longrightarrow B \\ a \longrightarrow r$$

dove r è il resto della divisione di a per 5.

Si chiede di:

- (a) determinare in A la relazione di equivalenza ρ_f associata a f ;
 - (b) costruire l'insieme quoziente A/ρ
 - (c) costruire Imf
 - (d) costruire le funzioni π, \bar{f} e j del teorema di decomposizione delle applicazioni e verificare il teorema stesso in questo caso particolare.
4. Costruire a piacere un ordinamento su \mathbb{Z} per il quale valga il principio del minimo.
 5. Descrivere tramite un grafico il reticolo dei divisori positivi di $n = 210$