

ALGEBRA - ESERCIZI DI AUTOVALUTAZIONE

3 marzo 2005

1. Siano S e T due insiemi con $|S| = n$ e $|T| = m$, $T \subseteq S$; calcolare la cardinalità dei seguenti insiemi:

$$A = \{f : S \rightarrow S / f(T) = T\},$$

$$B = \{g : S \rightarrow S / g(t) = t, \forall t \in T\}$$

$$C = \{h : S \rightarrow S / h(T) \subseteq T\},$$

$$D = \{k : S \leftrightarrow S \text{ (k biunivoca)} / k(T) \subseteq T\}$$

$$E = \{\alpha : S \rightarrow S / \forall s \in S, \alpha(s) \in T \Leftrightarrow s \in T\}.$$

2. Dimostrare che, se A e B sono due insiemi, risulta

$$(A \cup B) \cap C = B \iff [B \subseteq C \text{ e } A \cap C \subseteq B].$$

3. Considerati gli insiemi:

$$A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b, c, d\}, C = \{x, y, z, w\};$$

si costruiscano, se possibile, due funzioni $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$, non entrambi iniettive, in maniera tale che il prodotto operatorio $g \circ f$ sia una funzione iniettiva.

Si dica se è possibile costruire due funzioni $f' : A \rightarrow B$ e $g' : B \rightarrow C$, non entrambi suriettive, in maniera tale che il prodotto operatorio $g' \circ f'$ sia una funzione suriettiva.

4. Sia f una funzione di dominio A e codominio B e siano S e T due sottoinsiemi di A ; si verifichi se le seguenti uguaglianze sono vere o false:

$$f(S) \cup f(T) \stackrel{?}{=} f(S \cup T), \quad f(S) \cap f(T) \stackrel{?}{=} f(S \cap T);$$

in caso di risposta negativa si presenti un controesempio.

5. Verificare se l'applicazione seguente è o meno biunivoca:

$$\begin{array}{ccc} \alpha : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & 2x - |x| \end{array}$$

Ripetere l'esercizio prendendo come dominio e codominio \mathbb{Z} invece di \mathbb{R} .