

# SERIE NOTEVOLI

## 1. le SERIE aritmetiche:

sono serie  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  in cui:  $a_{n+1} = a_n + d$ , ovvero la differenza tra due termini consecutivi è

sempre la ragione  $d$ , le somme parziali valgono  $S_n = na_1 + d \frac{n(n-1)}{2}$

OGNI serie aritmetica è divergente infatti:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ na_1 + d \frac{n(n-1)}{2} \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \frac{2na_1 + dn^2 - nd}{2} \right] = \pm\infty \text{ secondo il segno di } d$$

es.1:  $\sum_{k=0}^{\infty} k$  diverge ( $d=1$ )

es.2:  $\sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)$  diverge ( $d=2$ )

## 2. le SERIE geometriche

sono serie  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  in cui:  $a_{n+1} = a_n \cdot q$ , ovvero il rapporto tra due termini consecutivi è

sempre la ragione  $q$ , le somme parziali valgono  $S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$  se  $q \neq 1$

quindi le serie geometriche:

**convergono** se  $|q| < 1$  cioè se  $-1 < q < 1$  infatti:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = a_1 \cdot \frac{1}{1-q}$

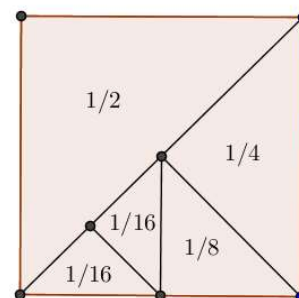
divergono se  $q \geq 1$  infatti  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = \infty$

sono indeterminate o non regolari se  $q \leq -1$

esempi:

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$  serie geom.  $a_1 = \frac{1}{2}$  e  $q = \frac{1}{2} < 1$  converge a  $S = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1$

(cfr. il tramezzino infinito o [il paradosso dello stadio](#))



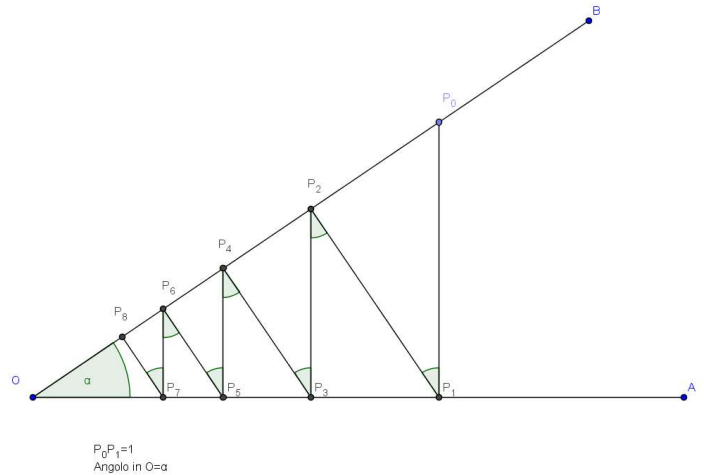
$\sum_{k=0}^{\infty} \pi^k$  serie geom. di ragione  $q = \pi > 1$  diverge

$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^k$  serie geom.  $a_1 = 1$  e  $q = \frac{4}{5} < 1$  converge a  $S = 1 \cdot \frac{1}{1 - \frac{4}{5}} = 5$

$\sum_{k=0}^{\infty} \cos^k \alpha$  serie geom.  $a_1 = 1$  e di ragione

$$q = \cos \alpha < 1 \text{ converge a } S = 1 \cdot \frac{1}{1 - \cos \alpha}$$

(è la lunghezza della spezzata  $P_0P_1 + P_1P_2 + P_2P_3 + \dots$  con  $\alpha < 90^\circ$ )



La ragione potrebbe essere variabile, in tal caso è necessario stabilire per quali valori si ha la convergenza:

$\sum_{k=0}^{\infty} (-x)^{3k}$  serie geom. di ragione  $q = -x^3$  converge a  $\frac{1}{1+x^3}$  se  $|-x^3| < 1$  cioè se  $|x| < 1$

$\sum_{k=0}^{\infty} (5x)^k$  serie geom. di ragione  $q = 5x$  converge a  $\frac{1}{1-5x}$  se  $|5x| < 1$  cioè se  $-\frac{1}{5} < x < \frac{1}{5}$

$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1-x}{3+x}\right)^k$  serie geom. di ragione  $q = \frac{1-x}{3+x}$  converge a  $\frac{3+x}{2+2x}$  se  $\left|\frac{1-x}{3+x}\right| < 1$  cioè se  $x > -1$

### 3. la SERIE armonica

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$  la serie armonica diverge anche se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$

si può dimostrare la sua divergenza con una maggiorazione:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16} + \dots >$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16} + \dots >$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \text{ che è una somma divergente}$$

La sua divergenza è comunque MOLTO lenta:  $\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k} \cong 5,18$ ;  $\sum_{k=1}^{10.000} \frac{1}{k} \cong 9,78$ ;  $\sum_{k=1}^{1.000.000} \frac{1}{k} \cong 14,39 \dots$

oppure si può dimostrare la sua divergenza con il [criterio di CAUCHY](#) scegliendo  $p=n$

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = n \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \text{ non può essere piccola a piacere}$$

## 4. la SERIE armonica a segni alterni

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots \text{ converge per il } \text{criterio di LEIBNIZ}$$

1. È una serie a termini di segno alterno

2. Il termine generico è infinitesimo  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 0$

## 5. la SERIE armonia generalizzata

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} = 1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} - \frac{1}{4^\alpha} + \dots \text{ converge se } \alpha > 1 \text{ diverge se } \alpha \leq 1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \text{ serie armonica generalizzata con } \alpha=2 > 1 \text{ è convergente (non dimostrata)}$$

## 6. le SERIE di Mengoli

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \dots$$

Il termine n-esimo può essere scritto come:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} - \frac{B}{n+1} = \frac{A(n+1) - Bn}{n(n+1)} = \frac{nA + A - Bn}{n(n+1)} = \frac{n(A-B) + A}{n(n+1)} \rightarrow \begin{cases} A-B=0 \\ A=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=1 \end{cases}$$
$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

In questo caso si possono calcolare le somme parziali:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

e quindi la somma della serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

## 7. le SERIE telescopiche

Sono serie che, come la serie di Mengoli, permettono di calcolare la somma parziale, potendo scrivere i suoi termini nella forma:

$$a_1 = b_1 - b_2$$

$$a_2 = b_2 - b_3$$

...

$$a_k = b_k - b_{k+1} \text{ per cui risulta}$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + (b_3 - b_4) + \dots + (b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{k+1}$$

$$\text{E quindi } S_n = \lim_{k \rightarrow +\infty} S_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} (b_1 - b_{k+1}) = b_1 - \lim_{k \rightarrow +\infty} b_{k+1}$$

ad es.:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 + 8k + 3}$$

Il termine n-esimo può essere scritto come:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4n^2 + 8n + 3} &= \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{A}{2n+1} - \frac{B}{2n+3} = \frac{A(2n+3) - B(2n+1)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{2nA + 3A - 2nB - B}{(2n+1)(2n+3)} \\ &= \frac{2n(A-B) + 3A - B}{(2n+1)(2n+3)} \rightarrow \begin{cases} A-B=0 \\ 3A-B=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A=1/2 \\ B=1/2 \end{cases} \rightarrow \\ \frac{1}{4n^2 + 8n + 3} &= \frac{1}{2(2n+1)} - \frac{1}{2(2n+3)} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right] \end{aligned}$$

In questo caso si possono calcolare le somme parziali:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \dots + \left( \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right) \right] = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{1}{2n+3} \right]$$

e quindi la somma della serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 + 8k + 3} = S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{1}{2n+3} \right) = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

## 8. altre SERIE notevoli

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$$

Non facile da dimostrare, ma si può dimostrare facilmente che la serie converge per il criterio del confronto ad un numero minore di 3:

si consideri la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$ , si osservi che  $\forall k \geq 1$  si ha:

$$\frac{1}{k!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (k-1) \cdot k} \leq \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{2^{k-1}}$$

poiché la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}}$  è una serie geometrica di ragione  $\frac{1}{2}$  e termine iniziale 1 la sua

somma vale:  $S = a_1 \frac{1}{1-q} = 1 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$ , si ha:

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + 2 = 3 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} < 3$$