TEORIA

IN SINTESI
Geometria euclidea nello spazio

Punti, rette, piani nello spazio

- Due rette nello spazio sono **complanari** (**incidenti** o **parallele**) se appartengono allo stesso piano, altrimenti sono **sghembe**.
- Due piani nello spazio sono:
  - **incidenti** se hanno in comune solo una retta;
  - **paralleli** se non hanno alcun punto in comune oppure sono coincidenti.
- Una retta nello spazio può essere:
  - **incidente** al piano se ha un solo punto in comune con il piano;
  - **parallela** al piano se non ha alcun punto in comune con il piano o se giace sul piano.
- Una retta incidente a un piano in un punto P è **perpendicolare al piano** quando è perpendicolare a tutte le rette del piano passanti per P. In tal caso P è detto **piede della perpendicolare**.
- **Teorema delle tre perpendicolari**: se dal piede H di una perpendicolare r a un piano α si manda la perpendicolare s a una qualunque retta t del piano, quest'ultima risulta perpendicolare al piano β delle prime due.
- La **distanza di un punto da un piano** è la lunghezza del segmento che ha per estremi il punto stesso e il piede della perpendicolare al piano.
- La **distanza fra una retta e un piano paralleli** è la distanza tra uno qualunque dei punti della retta e il piano.
- La **distanza fra due piani paralleli** è la lunghezza del segmento intercettato dai due piani su una qualunque retta perpendicolare ai due piani stessi.

Diedri e angoli nello spazio

- Dati due semipiani dello spazio aventi la stessa origine, un **diedro** è ognuna delle due parti, compresi i semipiani, in cui essi dividono lo spazio.
  - La **sezione** di un diedro è *l'angolo ottenuto dall'intersezione del diedro con un piano che interseca il suo spigolo*. Sezioni parallele di uno stesso diedro sono congruenti. Una sezione è **normale** se ottenuta come intersezione tra il diedro e un piano perpendicolare al suo spigolo.
  - Un **diedro** è **retto** se la sua sezione normale è un angolo retto.
  - Due **piani** incidenti sono **perpendicolari** quando dividono lo spazio in quattro diedri retti.
  - Se una retta $r \in \alpha$ è perpendicolare al piano β, allora $\alpha \perp \beta$.
  - Esiste ed è unico il piano passante per una retta r e perpendicolare al piano α.
- L'**angolo** di una retta r con un piano α è l'angolo acuto formato da r e dalla sua proiezione r' su α.

Poliedri

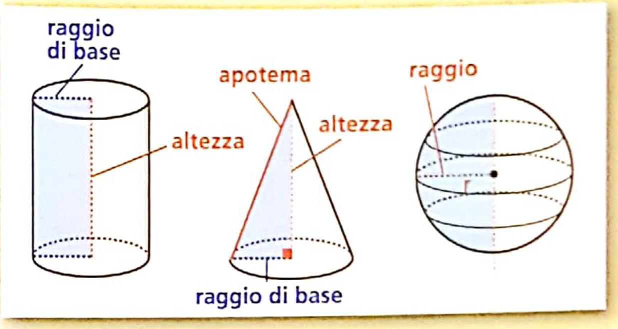
- Un **prisma** è un poliedro delimitato da due **basi** che sono poligoni congruenti posti su piani paralleli e da **facce laterali** che sono parallelogrammi. La distanza fra i piani delle basi è l'**altezza** del prisma.
  - Un prisma è **retto** se gli spigoli laterali sono perpendicolari ai piani delle basi, è **regolare** quando è retto e le sue basi sono poligoni regolari.
  - Un prisma è un **parallelepipedo** se anche le basi sono parallelogrammi.
  - Un parallelepipedo retto in cui le basi sono rettangoli è un **parallelepipedo rettangolo**. Se le tre dimensioni sono congruenti, è un **cubo**.
- Una **piramide** è un poliedro delimitato da un poligono, la **base**, e da **facce laterali** triangolari che hanno in comune il **vertice della piramide** e hanno il lato opposto a tale vertice coincidente con un lato del poligono di base. La distanza fra il vertice e il piano della base è l'**altezza** della piramide.

- Una piramide è **retta** quando nella base si può inscrivere una circonferenza il cui centro è la proiezione ortogonale del vertice della piramide sul piano di base. L'altezza delle sue facce laterali è l'**apotema**.
- Una piramide è **regolare** quando è retta e la sua base è un poligono regolare.

- Un **tronco di piramide** è limitato da due poligoni simili fra loro e posti su piani paralleli (le **basi** del tronco) e da **facce laterali** che sono trapezi.

Solidi di rotazione

I solidi di rotazione sono generati dalla rotazione di una figura piana attorno a una retta.

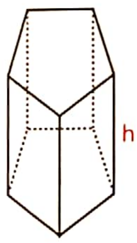


- Un **cilindro** è generato dalla rotazione completa di un rettangolo attorno a uno dei suoi lati; è **equilatero** se la sua altezza è congruente al diametro di base.
- Un **cono** è generato dalla rotazione completa di un triangolo rettangolo attorno a uno dei suoi cateti; è **equilatero** se l'apotema è congruente al diametro di base.
- Una **sfera** è generata dalla rotazione completa di un semicerchio attorno al suo diametro.

Aree e volumi dei solidi

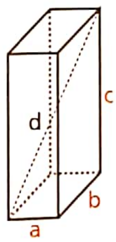
Principio di Cavalieri: due solidi che possono essere disposti in modo che ogni piano parallelo a un altro fissato, scelto come riferimento, li tagli secondo sezioni equivalenti, sono equivalenti.

Prisma retto



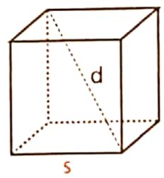
$A_\ell = 2p \cdot h$
$A_t = A_\ell + 2A_b$
$V = A_b \cdot h$

Parallelepipedo rettangolo



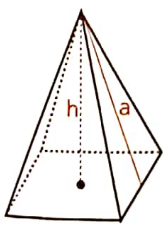
$A_t = 2(ac + ab + bc)$
$V = a \cdot b \cdot c$
$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Cubo



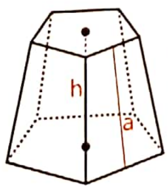
$A_t = 6s^2$
$V = s^3$
$d = s\sqrt{3}$

Piramide retta



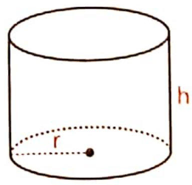
$A_\ell = p \cdot a$
$A_t = A_\ell + A_b$
$V = \frac{1}{3} A_b \cdot h$

Tronco di piramide retta



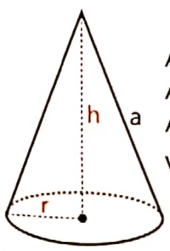
$A_\ell = (p + p') \cdot a$
$A_t = A_\ell + A_b + A'_b$
$V = \frac{1}{3} h (A_b + A'_b + \sqrt{A_b \cdot A'_b})$

Cilindro



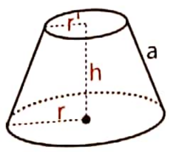
$A_b = \pi r^2$
$A_\ell = 2\pi r \cdot h$
$A_t = 2\pi r(h + r)$
$V = \pi r^2 \cdot h$

Cono



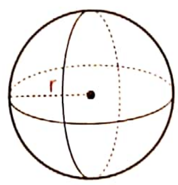
$A_b = \pi r^2$
$A_\ell = \pi r a$
$A_t = \pi r(a + r)$
$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$

Tronco di cono



$A_\ell = \pi a(r + r')$
$A_t = A_\ell + A_b + A'_b$
$V = \frac{1}{3} \pi h(r^2 + r'^2 + r \cdot r')$

Sfera



$A = 4\pi r^2$
$V = \frac{4}{3} \pi r^3$