LA TEORIA IN SINTESI

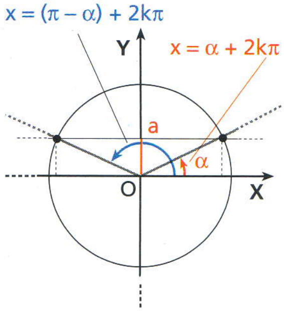
LE EQUAZIONI E LE DISEQUAZIONI GONIOMETRICHE

1. LE EQUAZIONI GONIOMETRICHE ELEMENTARI

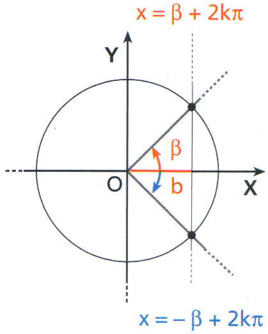
- **Equazione goniometrica**: contiene almeno una funzione goniometrica dell'incognita.
- **Equazione goniometrica elementare**: è del tipo $\operatorname{sen} x = a$, $\cos x = b$, $\operatorname{tg} x = c$.

Equazioni goniometriche elementari

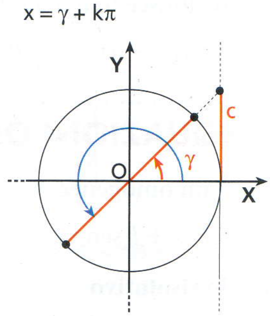
$$\operatorname{sen} x = a \begin{cases} \text{determinata se } -1 \le a \le 1 \\ \text{impossibile se } a < -1 \vee a > 1 \end{cases}$$



$$\cos x = b \begin{cases} \text{determinata se } -1 \le b \le 1 \\ \text{impossibile se } b < -1 \vee b > 1 \end{cases}$$



$\operatorname{tg} x = c$ determinata $\forall c \in \mathbb{R}$



Proprietà di risoluzione di particolari equazioni goniometriche elementari

Particolari equazioni elementari	Proprietà di risoluzione
$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} \alpha'$	$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} \alpha' \;\Leftrightarrow\; \alpha = \alpha' + 2k\pi \;\vee\; \alpha + \alpha' = \pi + 2k\pi$
$\operatorname{sen} \alpha = -\operatorname{sen} \alpha'$	$-\operatorname{sen} \alpha' = \operatorname{sen}(-\alpha')$
$\operatorname{sen} \alpha = \cos \alpha'$	$\cos \alpha' = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha'\right)$
$\operatorname{sen} \alpha = -\cos \alpha'$	$-\cos \alpha' = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha'\right) = \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha'\right)$
$\cos \alpha = \cos \alpha'$	$\cos \alpha = \cos \alpha' \Leftrightarrow \alpha = \pm \alpha' + 2k\pi$
$\cos \alpha = -\cos \alpha'$	$-\cos \alpha' = \cos(\pi - \alpha')$
$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha'$	$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha' \Leftrightarrow \alpha = \alpha' + k\pi$
$\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} \alpha'$	$-\operatorname{tg} \alpha' = \operatorname{tg}(-\alpha')$
$\operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{cotg} \alpha'$	$\operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

2. LE EQUAZIONI LINEARI IN SENO E COSENO

- **Equazioni lineari**: sono della forma $a \operatorname{sen} x + b \cos x + c = 0$, con $a \neq 0$ e $b \neq 0$.

- **Metodo di risoluzione algebrico**
  - $c = 0$: si dividono i membri per $\cos x \neq 0$ e si risolve l'equazione in tangente.
  - $c \neq 0$:
    – si determinano eventuali soluzioni del tipo $x = \pi + 2k\pi$;
    – si utilizzano le formule parametriche per $x \neq \pi + 2k\pi$:
    $$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{e} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \text{con } t = \operatorname{tg}\frac{x}{2};$$
    – si risolve l'equazione in t.
- **Metodo di risoluzione grafico**
  - Si esegue la sostituzione $\operatorname{sen} x = Y$ e $\cos x = X$.
  - Si risolve il sistema tra equazione della retta $aY + bX + c = 0$ e $X^2 + Y^2 = 1$, equazione della circonferenza goniometrica.
  - Le soluzioni dell'equazione sono i punti di intersezione tra retta e circonferenza.
- **Metodo di risoluzione dell'angolo aggiunto**
  - Si considera $a \operatorname{sen} x + b \cos x = r \operatorname{sen}(x + \alpha)$, con $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}$.
  - Si sostituisce in $a \operatorname{sen} x + b \cos x + c = 0$:
  $$r \operatorname{sen}(x+\alpha) + c = 0 \;\rightarrow\; \operatorname{sen}(x+\alpha) = -\frac{c}{r}, \text{ equazione elementare.}$$

3. LE EQUAZIONI OMOGENEE DI SECONDO GRADO IN SENO E COSENO

- **Equazioni omogenee di secondo grado in seno e coseno**: sono le equazioni riconducibili alla forma:
  $$a \cdot \operatorname{sen}^2 x + b \operatorname{sen} x \cos x + c \cos^2 x = 0.$$
- **Metodo risolutivo**

  Primo caso: $a = 0 \vee c = 0$.

  L'equazione diventa:
  - se $a = 0$: $b \operatorname{sen} x \cos x + c \cos^2 x = 0 \;\rightarrow\; \cos x(b \operatorname{sen} x + c \cos x) = 0$;
  - se $c = 0$: $a \operatorname{sen}^2 x + b \operatorname{sen} x \cos x = 0 \;\rightarrow\; \operatorname{sen} x(a \operatorname{sen} x + b \cos x) = 0$.

  Si risolve con la legge di annullamento del prodotto.

  Secondo caso: $a \neq 0 \wedge c \neq 0$.

  Si divide per $\cos^2 x$ (diverso da 0, essendo $a \neq 0$) e si ottiene:
  $$a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c = 0.$$
- Sono **riconducibili** a omogenee di secondo grado in seno e coseno le equazioni del tipo:
  $$a \cdot \operatorname{sen}^2 x + b \cdot \operatorname{sen} x \cos x + c \cdot \cos^2 x = d \ (d \neq 0).$$
- **Metodo risolutivo**
  - Si moltiplica d per $1 = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$.
  - Si risolve l'equazione omogenea così ottenuta nella forma:
  $$a \cdot \operatorname{sen}^2 x + b \cdot \operatorname{sen} x \cos x + c \cdot \cos^2 x = d \cdot (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x).$$