Dimostrazione formale della validità della formula di STIEFEL

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Step1: secondo la definizione scrivo i binomiali come fattoriali

$$\frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{(n-1)!}{(n-1-k+1)!(k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!k!}$$

Step2: semplifico i fattoriali
(per non affollare le semplificazioni eseguo una semplificazione alla volta, si potrebbero svolgere tutte insieme)

$$\frac{n \cdot \cancel{(n-1)!}}{(n-k)!k!} = \frac{\cancel{(n-1)!}}{(n-1-k+1)!(k-1)!} + \frac{\cancel{(n-1)!}}{(n-k-1)!k!}$$

$$\frac{n}{(n-k)!k!} = \frac{1}{(n-k)!(k-1)!} + \frac{1}{(n-k-1)!k!}$$

$$\frac{n}{(n-k) \cdot \cancel{(n-k-1)!}k!} = \frac{1}{(n-k) \cdot \cancel{(n-k-1)!}\,(k-1)!} + \frac{1}{\cancel{(n-k-1)!}k!}$$

$$\frac{n}{(n-k) \cdot k!} = \frac{1}{(n-k) \cdot (k-1)!} + \frac{1}{k!}$$

$$\frac{n}{(n-k) \cdot k \cdot \cancel{(k-1)!}} = \frac{1}{(n-k) \cdot \cancel{(k-1)!}} + \frac{1}{k \cdot \cancel{(k-1)!}}$$

Step3: passaggi algebrici

$$\frac{n}{(n-k) \cdot k} = \frac{1}{(n-k)} + \frac{1}{k}$$

$$\frac{n}{(n-k) \cdot k} = \frac{n \cancel{-k} \cancel{+k}}{(n-k) \cdot k}$$

$$\frac{n}{(n-k) \cdot k} = \frac{n}{(n-k) \cdot k}$$