Calcolo delle probabilità: i quiz a risposta multipla

Procedendo dal più semplice al più difficile, siano dati i seguenti eventi:

E1: *rispondendo a caso ad una domanda di tipo Vero/Falso, indovinare la risposta*

$$P(E_1) = \frac{1}{2}$$

E2: *rispondendo a caso a 20 domande di tipo Vero/Falso, indovinare tutte le risposte*

$$P(E_2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{20} = \frac{1}{2^{20}} = \frac{1}{1.048.576}$$

E3: *rispondendo a caso a 20 domande di tipo Vero/Falso, indovinare le prime 14 risposte (e sbagliare le ultime 6)*

$$P(E_3) = \left(\frac{1}{2}\right)^{14} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{6} = \frac{1}{2^{20}} = \frac{1}{1.048.576}$$

E4: *rispondendo a caso a 20 domande di tipo Vero/Falso, indovinare esattamente 14 risposte (e sbagliarne 6), ma in ordine sparso*

$$P(E_4) = \left(\frac{1}{2}\right)^{14} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{6} \cdot \frac{20!}{14! \cdot 6!} = \frac{1}{2^{20}} \cdot 38760 = 0,0369 \cong 3,7\%$$

Osservazione 1: il risultato precedente si può anche scrivere: $P(E_4) = \frac{\binom{20}{14}}{2^{20}} = 0,0369 \cong 3,7\%$ dove si vede meglio che i casi possibili sono le disposizioni con ripetizione di n=2 oggetti (V e F) di classe k=20 (le 20 domande) in cui l'ordine è rilevante e le ripetizioni (dei 2 oggetti distinti) sono ammesse.

e $\binom{20}{14} = \binom{20}{6} = \frac{20!}{14! \cdot 6!}$ sono i possibili gruppi di 20 oggetti (le 20 domande) di classe k=14 (cioè i possibili gruppi di 14 V e 6F in cui l'ordine non è rilevante)

Osservazione 2: la probabilità di indovinare 14 e di sbagliare 6 è la stessa di indovinare 6 e sbagliare 14.

Osservazione 3: il fattore $\frac{20!}{14! \cdot 6!}$ può essere letto come il numero dei possibili anagrammi della parola "VVVVVVVVVVVVVVFFFFFF" che sono i possibili ordinamenti delle 14 risposte esatte e delle 6 sbagliate.

Osservazione 4: indicando con V0 l'evento nessuna Vera e 20 F, V1 l'evento 1 Vera e 19 False e così via,

$$P(V0) + P(V1) + P(V2) + ... + P(20) =$$

$$= \frac{\binom{20}{0}}{2^{20}} + \frac{\binom{20}{1}}{2^{20}} + \frac{\binom{20}{2}}{2^{20}} + ... + \frac{\binom{20}{20}}{2^{20}} = \frac{2^{20}}{2^{20}} = 1$$ (ossia la probabilità dell'evento certo è 1 e nel triangolo di Tartaglia la somma degli elementi della riga n-esima vale 2^n)

Calcolo delle probabilità: il lancio di monete

Procedendo dal più semplice al più difficile, siano dati i seguenti eventi:

E1: *lanciando una moneta esce Testa*

$$P(E_1) = \frac{1}{2}$$

E2: *lanciando 20 monete esce Testa* ***tutte*** *le volte*

$$P(E_2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{20} = \frac{1}{2^{20}} = \frac{1}{1.048.576}$$

E3: *lanciando 20 monete esce Testa le prime* ***14*** *volte e Croce le ultime 6 volte*

$$P(E_3) = \left(\frac{1}{2}\right)^{14} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{6} = \frac{1}{2^{20}} = \frac{1}{1.048.576}$$

E4: *lanciando 20 monete esce Testa* ***14*** *volte e Croce 6 volte, ma non importa in quale ordine*

$$P(E_4) = \left(\frac{1}{2}\right)^{14} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{6} \cdot \frac{20!}{14!\cdot 6!} = \frac{1}{2^{20}} \cdot 38760 = 0,0369 \cong 3,7\%$$

Osservazione 1: il risultato precedente si può anche scrivere: $P(E_4) = \frac{\binom{20}{14}}{2^{20}} = 0,0369 \cong 3,7\%$ dove si vede meglio che i casi possibili sono le disposizioni con ripetizione di n=2 oggetti (T e C) di classe k=20 (le 20 monete) in cui l'ordine è rilevante e le ripetizioni (dei 2 oggetti distinti) sono ammesse.

e $\binom{20}{14} = \binom{20}{6} = \frac{20!}{14!\cdot 6!}$ sono i possibili gruppi di 20 oggetti (le 20 monete) di classe k=14 (cioè i possibili gruppi di 14 T e 6 C in cui l'ordine non è rilevante)

Osservazione 2: la probabilità di avere 14 T e 6 C è la stessa di avere 6 C e 14 T.

Osservazione 3: il fattore $\frac{20!}{14!\cdot 6!}$ può essere letto come il numero dei possibili anagrammi della parola "TTTTTTTTTTTTTTCCCCCC" che sono i possibili ordinamenti delle 14 T e delle 6 C.

Osservazione 4: indicando con 0T l'evento nessuna Testa e 20 C, 1T l'evento 1 Testa e 19 Croci e così via,

$$P(0T) + P(1T) + P(2T) + ... + P(20T) =$$

$$= \frac{\binom{20}{0}}{2^{20}} + \frac{\binom{20}{1}}{2^{20}} + \frac{\binom{20}{2}}{2^{20}} + ... + \frac{\binom{20}{20}}{2^{20}} = \frac{2^{20}}{2^{20}} = 1$$ (ossia la probabilità dell'evento certo è 1 e nel triangolo di tartaglia la somma degli elementi della riga n-esima vale 2^n)