Formulario moti celesti (leggi di Keplero e gravitazione universale)

3° legge di Keplero: $\boxed{\frac{T^2}{R^3} = kost}$

esercizio: calcolare la distanza media dal sole di un asteroide che ha un periodo di rivoluzione di 20 anni.

$$k_{sole} = \frac{T_{terra}^2}{R_{terra}^3} = \frac{1^2\ anno^2}{1^3\ UA^3} = 1 anno^2 / UA^3$$

(R_{terra} rappresenta il raggio medio dell'orbita terrestre)

$$k_{sole} = \frac{T_{asteroide}^2}{R_{asteriode}^3} = \frac{(20\ anni)^2}{R_{asteriode}^3} = 1\ anno^2 / UA^3 \Rightarrow R_{asteriode} = \sqrt[3]{400 UA^3} = 7{,}37 UA$$

esercizio: calcolare la distanza media dal sole di Giove sapendo che ha un periodo $T = 3{,}74 \cdot 10^8\ s$.

$$k_{sole} = \frac{T_{terra}^2}{R_{terra}^3} = \frac{\left(3{,}16 \cdot 10^7\ s\right)^2}{\left(1{,}49 \cdot 10^{11}\ m\right)^3} = 3{,}0 \cdot 10^{-19}\ s^2 / m^3$$

$$k_{sole} = \frac{T_{giove}^2}{R_{giove}^3} = \frac{(3{,}74 \cdot 10^8\ s)^2}{R_{giove}^3} = 3{,}0 \cdot 10^{-19}\ s^2 / m^3 \Rightarrow R_{giove} = \sqrt[3]{\frac{13{,}99 \cdot 10^{16}\ s^2}{3{,}0 \cdot 10^{-19}\ s^2 / m^3}} = \sqrt[3]{466 \cdot 10^{33}\ m^3} = 7{,}75 \cdot 10^{11}\ m$$

il valore trovato è quasi il valore reale $7{,}78 \cdot 10^{11}\ m$ la differenza è dovuta ad inevitabili errori di arrotondamento

Legge di gravitazione universale: $\boxed{F = G\frac{m_1 m_2}{R^2}}$ costante di Cavendish: $\boxed{G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} Nm^2 / Kg^2}$

È possibile "stimare" la massa di un corpo celeste eguagliando la forza gravitazione con quella centrifuga, ad esempio nel caso del sole e della terra

la forza gravitazionale vale: $F = G\frac{m_{sole} m_{terra}}{R^2}$

la forza centrifuga vale: $F = m_{terra} a_c = m_{terra}\frac{v^2}{R} = m_{terra}\left(\frac{2\pi R}{T}\right)^2 \frac{1}{R} = m_{terra}\frac{4\pi^2 R}{T^2}$

confrontando si ottiene: $G\frac{m_{sole}\ \cancel{m_{terra}}}{R^2} = \cancel{m_{terra}}\frac{4\pi^2 R}{T^2}$ e semplificando si ha:

$\boxed{m_{sole} = \frac{4\pi^2}{G} \cdot \frac{R_{terra}^3}{T_{terra}^2}}$ Questa formula può essere utilizzata per stimare la massa di qualsiasi altro corpo celeste conoscendo T e R di un altro corpo celeste che gli orbiti intorno. Ad esempio la massa della terra può essere stimata conoscendo il T e R della luna…

Esercizio: stimare la massa del sole conoscendo $T = 3{,}16 \cdot 10^7\ s$ e $R = 1{,}49 \cdot 10^{11}\ m$ della terra:

$$m_{sole} = \frac{4\pi^2}{G} \cdot \frac{R_{terra}^3}{T_{terra}^2} = \frac{4\pi^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11} Nm^2 / Kg^2} \cdot \frac{\left(1{,}49 \cdot 10^{11}\ m\right)^3}{\left(3{,}16 \cdot 10^7\ s\right)^2} = 1{,}97 \cdot 10^{30}\ Kg$$