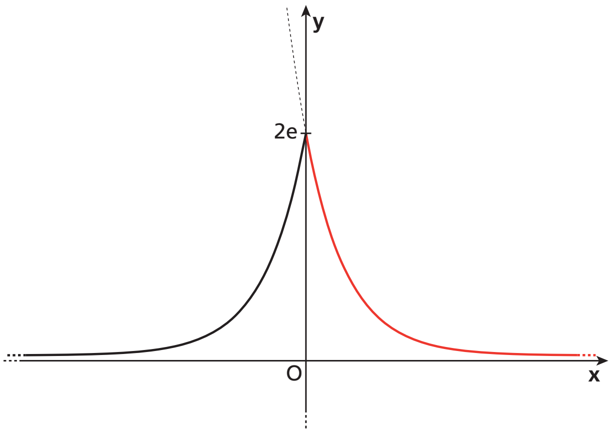
ESEMPIO SECONDA PROVA DI MATEMATICA E FISICA
pubblicato dal MIUR il 28 febbraio 2019

Svolgimento

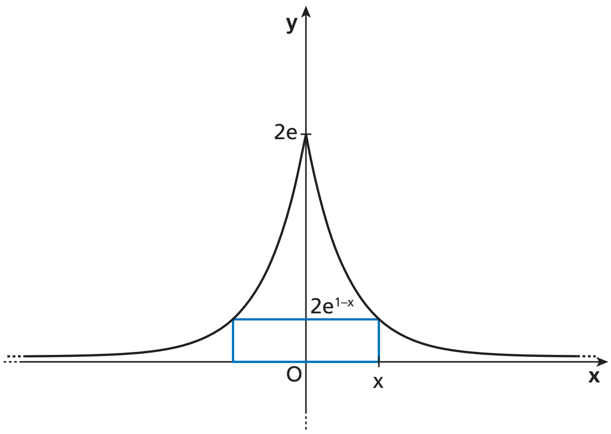
Quesito 2

A cura di Francesco Benvenuti ed Elisa Garagnani

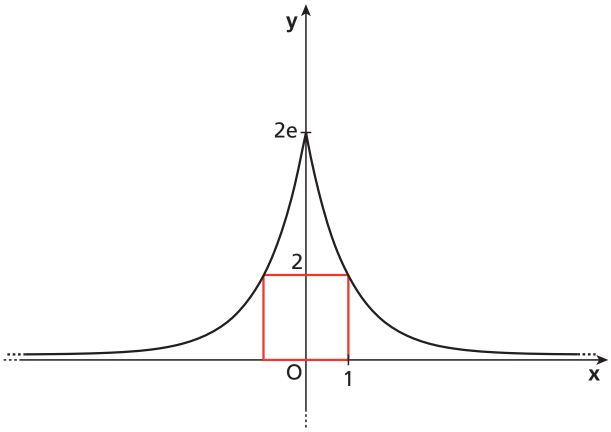
La funzione di equazione $y = 2e^{1-|x|}$ è una funzione pari.
Per $x \geq 0$, si ottiene l'equazione $y = 2e^{1-x} = 2e \cdot e^{-x}$, il cui grafico è quello di un esponenziale decrescente dilatato verticalmente, passante per $(0; 2e)$, con asintoto orizzontale l'asse x.
Il grafico di $y = 2e^{1-|x|}$ è dunque:



Inscriviamo un generico rettangolo nella regione considerata:



Sia x l'ascissa del vertice di coordinate $(x; 0)$ con $x \geq 0$.
L'area del rettangolo vale $A(x) = 2 \cdot x \cdot 2e^{1-x} = 4xe^{1-x}$, con $x > 0$.
La derivata vale $A'(x) = 4(e^{1-x} - xe^{1-x}) = 4e^{1-x}(1 - x)$, che è positiva per $x \in]0; 1[$, negativa per $x > 1$ e si annulla in $x = 1$. Dunque l'area massima si ottiene per $x = 1$.
In questo caso la base del rettangolo vale 2 e l'altezza $2e^{1-1} = 2$, quindi si tratta di un quadrato:



Il perimetro del generico rettangolo inscritto vale

$$2p(x) = 4x + 2 \cdot 2e^{1-x} = 4(x + e^{1-x})$$

la cui derivata vale

$$2p'(x) = 4(1 - e^{1-x})$$

che è positiva se $e^{1-x} < 1$, cioè se $1 - x < 0$, cioè se $x > 1$.
In $x = 1$ si annulla, per poi diventare negativa per $x < 1$.
Dunque il perimetro minimo si ottiene nella stessa situazione in cui si ha l'area massima, ossia nel caso in cui il rettangolo sia un quadrato.

