ESEMPIO SECONDA PROVA DI MATEMATICA E FISICA
pubblicato dal MIUR il 28 febbraio 2019

Svolgimento

Quesito 1

A cura di Francesco Benvenuti ed Elisa Garagnani

Imponiamo, innanzitutto, che la funzione g sia continua in $x = 1$, calcolando il limite destro e sinistro per x che tende a 1 e uguagliandoli tra loro e al valore della funzione in 1:

$$g(1) = \lim_{x\to 1^-}(3 - ax^2) = \lim_{x\to 1^+}\frac{b}{x-3} \quad\Rightarrow\quad 3 - a = -\frac{b}{2} \quad\Rightarrow\quad b = 2a - 6.$$

Studiamo ora la derivabilità di $g(x)$:

$$g'(x) = \begin{cases} -2ax, \ x < 1 \\ -\dfrac{b}{(x-3)^2}, \ x > 1. \end{cases}$$

Poniamo

$$\lim_{x\to 1^-}(-2ax) = \lim_{x\to 1^+}\left(-\frac{b}{(x-3)^2}\right) \quad\Rightarrow\quad -2a = -\frac{b}{4} \quad\Rightarrow\quad b = 8a.$$

Mettiamo a sistema le due condizioni su a e b:

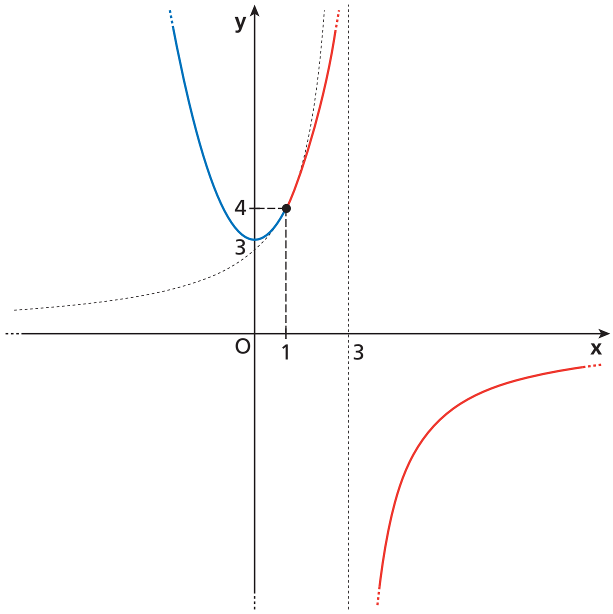
$$\begin{cases} b = 2a - 6 \\ b = 8a \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} 2a - 6 = 8a \\ b = 8a \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} a = -1 \\ b = -8 \end{cases}$$

Per tali valori,

$$g(x) = \begin{cases} 3 + x^2, \ x \le 1 \\ \dfrac{-8}{x-3}, \ x > 1 \wedge x \ne 3 \end{cases} \quad \text{e } g'(x) = \begin{cases} 2x, \ x \le 1 \\ \dfrac{8}{(x-3)^2}, \ x > 1 \wedge x \ne 3 \end{cases}$$

Disegniamo il grafico di $g(x)$.
L'equazione $y = 3 + x^2$ rappresenta una parabola con asse verticale, vertice $V(0;3)$ e passante per $(1;4)$.
L'equazione $y = -\dfrac{8}{x-3}$ è l'equazione di una funzione omografica che ha per grafico l'iperbole equilatera di centro $C(3;0)$, asintoti di equazione $x = 3$ e $y = 0$ e passante per $(1;4)$.

Il grafico di g è dunque questo:



Possiamo osservare dal grafico che la funzione g è continua e derivabile anche in $x = 1$.

Disegniamo il grafico di $g'(x)$.
La funzione di equazione $y = 2x$ ha come grafico la retta passante per l'origine e per il punto $(1; 2)$.
La funzione di equazione $y = \frac{8}{(x-3)^2}$ ha come asintoto verticale la retta $x = 3$, poiché

$$\lim_{x \to 3} \frac{8}{(x-3)^2} = +\infty.$$

Inoltre è una funzione sempre positiva nel dominio.
Essa è crescente per $x < 3$ e decrescente per $x > 3$ poiché la sua derivata prima è la derivata seconda di $y = -\frac{8}{x-3}$, che è positiva per $x < 3$ (dove la concavità dell'iperbole è rivolta verso l'alto) e negativa per $x > 3$ (dove la concavità dell'iperbole è rivolta verso il basso).
La funzione definita per casi g' è continua anche in $x = 1$. Infatti

$$g'(1) = 2 = \lim_{x \to 1} \frac{8}{(x-3)^2}$$

g' è anche derivabile in $x = 1$. Infatti:

$$g''(x) = \begin{cases} 2, \ x < 1 \\ \dfrac{-16}{(x-3)^3}, \ x > 1 \wedge x \neq 3 \end{cases} \quad \text{e} \ \lim_{x \to 1^-} 2x = 2 = \lim_{x \to 1^+} \frac{-16}{(x-3)^3} = 2$$

Dunque $g''(1) = 2$.

In conclusione, il grafico di g'' è questo: