ESEMPIO SECONDA PROVA DI MATEMATICA E FISICA
pubblicato dal MIUR il 28 febbraio 2019

Svolgimento

A cura di Francesco Benvenuti, Lidia Ceresara, Elisa Garagnani,
Gianni Melegari e Claudio Romeni

Problema 1

1 La derivata prima della funzione $q(t)$ è

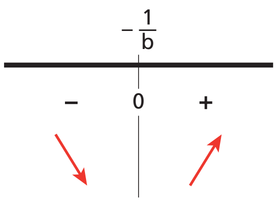
$$q'(t) = ae^{bt} + abte^{bt} = a(1 + bt)e^{bt}$$

Dallo studio del segno di $q'(t)$ (sapendo che $a > 0$ e $e^{bt} > 0$) si ha

$$a(1 + bt)e^{bt} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad bt + 1 \geq 0$$

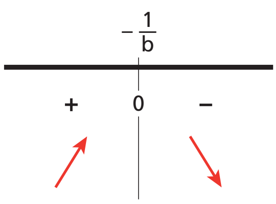
- Se $b > 0 \quad \Rightarrow \quad t \geq -\dfrac{1}{b}$

  In tal caso si ha un minimo relativo per $x = -\dfrac{1}{b}$



- Se $b = 0$ la funzione di partenza $q(t) = at$ è lineare e $q'(t) = a$ è costante. In tal caso non ci sono né punti di massimo né punti di minimo.
- Se $b < 0 \quad \Rightarrow \quad t \leq -\dfrac{1}{b}$

  In tal caso si ha un massimo relativo per $x = -\dfrac{1}{b}$



Affinché la funzione $q(t)$ ammetta un massimo in B deve risultare $b < 0$ e

$$\begin{cases} q(2) = \dfrac{8}{e} \\ q'(2) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2ae^{2b} = \dfrac{8}{e} \\ a(2b + 1)e^{2b} = 0 \end{cases}$$

Per le condizioni imposte dal problema, la seconda equazione è risolta solo per $b = -\frac{1}{2}$, perciò

$$\begin{cases} \dfrac{2a}{e} = \dfrac{8}{e} \\ b = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = 4 \\ b = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

2 La funzione $q(t) = 4te^{-\frac{t}{2}}$ esiste $\forall t \in \mathbb{R}$. I limiti per $t \to +\infty$ e $t \to -\infty$ valgono (applicando il teorema di de l'Hospital)

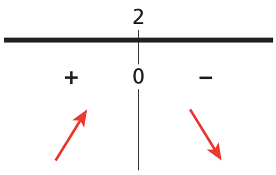
$$\lim_{t\to+\infty} 4te^{-\frac{t}{2}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{4t}{e^{\frac{t}{2}}} \overset{H}{=} \lim_{t\to+\infty} \frac{4}{\frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}} = 0^+$$

$$\lim_{t\to-\infty} 4te^{-\frac{t}{2}} = -\infty$$

Agli stessi risultati si poteva arrivare considerando la gerarchia degli infiniti.
L'unico punto in cui la funzione interseca gli assi è l'origine $O(0; 0)$.
Il segno della funzione è $q(t) > 0 \Rightarrow t > 0$ poiché il fattore $e^{-\frac{t}{2}}$ è sempre positivo.
Utilizzando il risultato ottenuto al punto precedente, la derivata prima di $q(t)$ è

$$q'(t) = 4e^{-\frac{t}{2}}\left(1 - \frac{t}{2}\right)$$

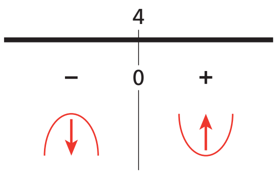
Il suo segno è indicato in figura



Si ha un massimo nel punto $B\left(2; \frac{8}{e}\right)$, coerentemente con il punto precedente.
La derivata seconda di $q(t)$ è

$$q''(t) = -\frac{1}{2} \cdot 4e^{-\frac{t}{2}}\left(1 - \frac{t}{2}\right) + 4e^{-\frac{t}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = (t-4)e^{-\frac{t}{2}}$$

Il cui segno è indicato in figura



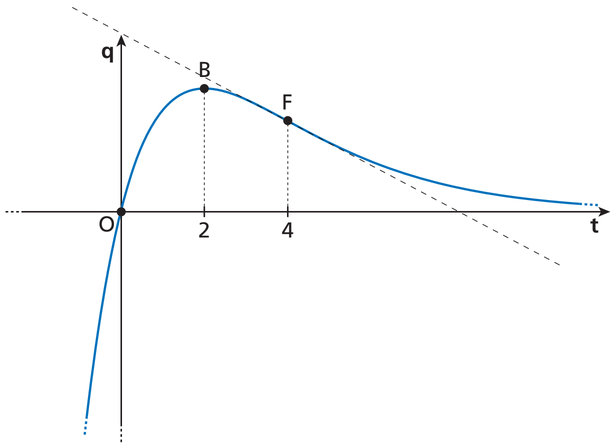
Per cui in $t = 4$ vi è un punto di flesso a tangente obliqua di coordinate $F\left(4; \frac{16}{e^2}\right)$.
Il coefficiente angolare della tangente inflessionale è

$$q'(4) = -4e^{-2}$$

Quindi l'equazione della retta tangente è

$$y = -\frac{4}{e^2}t + \frac{32}{e^2}$$

E il suo grafico è



3 Il problema propone di interpretare la funzione $q(t)$ come *la carica elettrica che attraversa all'istante di tempo t la sezione di un certo conduttore*. Questa interpretazione *non* ha significato fisico.

Infatti, in Fisica non è definita una grandezza "carica elettrica che attraversa all'istante di tempo t la sezione di un conduttore". Si definisce invece la carica elettrica $Q(t)$ presente all'istante t sulla superficie di un conduttore, ma non è questo il caso proposto dal problema.

Esistono altre due definizioni:

a) la carica che attraversa una sezione di un conduttore in un dato intervallo di tempo;

b) la corrente elettrica, cioè la rapidità di trasferimento della carica.

Sulla base di esse, proponiamo due possibili interpretazioni per il termine $at \cdot e^{bt}$.

a) $at \cdot e^{bt}$ è una carica

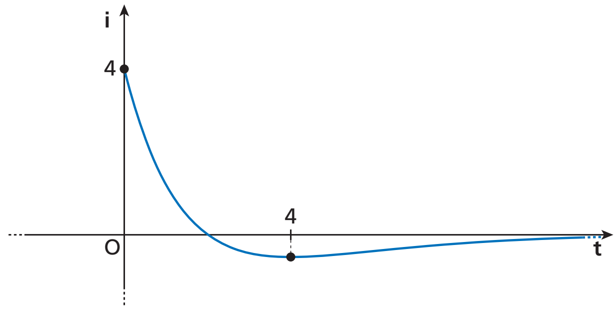
3a Scegliendo l'impostazione usuale in cui $q(t)$, per $t \geq 0$, rappresenta la carica elettrica in coulomb che *ha attraversato* una sezione trasversale del conduttore dall'istante $t = 0$ fino al generico istante t, allora le costanti a e b devono avere le seguenti dimensioni:

$$a \quad \longrightarrow \quad \frac{[\text{carica}]}{[\text{tempo}]} = [\text{corrente}]$$
$$b \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{[\text{tempo}]}$$

La corrente è data dalla derivata della carica rispetto al tempo

$$i(t) = q'(t) = 4e^{-\frac{t}{2}}\left(1 - \frac{t}{2}\right)$$

per cui il suo andamento corrisponde al grafico della funzione derivata prima $q'(t)$. Dovendo considerare solo $t \geq 0$, il grafico è



Il valore massimo della corrente si ha per $t = 0$ s:

$$i(0) = 4 \text{ A}$$

Il valore minimo si ha in corrispondenza del punto di flesso di $q(t)$ cioè per $t = 4$ s:

$$i(4) = -4e^{-2} \text{ A}$$

Al trascorrere del tempo, per $t \to +\infty$, si ha (applicando il teorema di de l'Hospital):

$$\lim_{t\to+\infty} i(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{2(2-t)}{e^{\frac{t}{2}}} \overset{H}{=} \lim_{t\to+\infty} \frac{-2}{\frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}} = 0^-$$

Allo stesso risultato si poteva arrivare considerando la gerarchia degli infiniti.

4a In coerenza con l'interpretazione data, la carica $Q(t_0)$ che attraversa una sezione trasversale del conduttore da $t = 0$ fino a $t = t_0$ si calcola con l'integrale definito

$$Q(t_0) = \int_0^{t_0} i(t)\mathrm{d}t = \left[4te^{-\frac{t}{2}}\right]_0^{t_0} = 4t_0e^{-\frac{t_0}{2}}$$

Ma è inutile ricavare la primitiva della derivata di una funzione, perché, a meno di una costante, è la funzione stessa.
Si ha

$$\lim_{t_0\to+\infty} Q(t_0) = 0^+$$

come si vede anche nel grafico del punto 2.

La potenza è, per effetto Joule, $P = Ri^2$ e l'energia dissipata nell'intervallo $[0; t_0]$ vale (omettendo l'unità di misura di R)

$$E = \int_0^{t_0} Ri^2(t)\mathrm{d}t = \int_0^{t_0} 3 \cdot \left[2(2-t)e^{-\frac{t}{2}}\right]^2 \mathrm{d}t = \int_0^{t_0} 12 \cdot (2-t)^2 e^{-t}\mathrm{d}t$$

ed è misurata in joule (J).

b) $at \cdot e^{bt}$ è una corrente

3b In alternativa, la carica che attraversa una sezione di un conduttore in un istante di tempo è una *corrente elettrica*. Allora si può interpretare la formula del testo come la quantità infinitesima di carica dq che attraversa la sezione del conduttore in un intervallo di tempo dt:

$$\mathrm{d}q(t) = i(t)\,\mathrm{d}t = 4\,t\,e^{-\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t$$

Secondo questa ipotesi le dimensioni fisiche dei parametri sono

$$\begin{aligned} a &\to \frac{[\text{carica}]}{[\text{tempo}]^2} = \frac{[\text{corrente}]}{[\text{tempo}]} \\ b &\to \frac{1}{[\text{tempo}]} \end{aligned}$$

In questo caso l'intensità di corrente è

$$i(t) = 4t\,e^{-\frac{t}{2}} \qquad (t \geq 0)$$

Quindi la funzione $4t\,e^{-\frac{t}{2}}$ è una corrente e *non* una carica.

Il valore massimo di questa funzione è $\frac{8}{e}$ A e corrisponde alle coordinate $\left(2;\ \frac{8}{e}\right)$ già individuate in precedenza, come è detto anche nel testo. Il suo valore minimo è $i = 0$ e viene assunto solo all'istante $t = 0$.

Come già visto nel punto 2, la corrente tende a 0^+ per $t \to +\infty$

4b In coerenza con l'interpretazione data, la carica $Q(t_0)$ che attraversa una sezione trasversale del conduttore da $t = 0$ fino a $t = t_0$ si calcola con l'integrale definito

$$Q(t_0) = \int_0^{t_0} i(t)\,\mathrm{d}t = 4\int_0^{t_0} t\,e^{-\frac{t}{2}}\mathrm{d}t$$

L'integrale indefinito associato si calcola per parti scegliendo t come fattore finito. In questo modo si ottiene

$$\int t\,e^{-\frac{t}{2}}\mathrm{d}t = -2\,te^{-\frac{t}{2}} + 2\int e^{-\frac{t}{2}}\mathrm{d}t = -2e^{-\frac{t}{2}}(t+2) + c$$

Quindi

$$Q(t_0) = 4\int_0^{t_0} t\,e^{-\frac{t}{2}}\mathrm{d}t = \left[-2e^{-\frac{t}{2}}(t+2)\right]_0^{t_0} = 8\left[2 - e^{-\frac{t_0}{2}}(t_0+2)\right]$$

Per cui il limite richiesto è

$$\lim_{t_0\to+\infty} Q(t_0) = 8\lim_{t_0\to+\infty}\left[2 - e^{-\frac{t_0}{2}}(t_0+2)\right] = 16 - \lim_{t_0\to+\infty}\frac{t_0+2}{e^{\frac{t_0}{2}}} = 16\text{ C}$$

Con la resistenza data, e tralasciando ancora una volta l'unità di misura della resistenza nei passaggi intermedi, l'energia dissipata nell'intervallo di tempo $[0,\ t_0]$ è data dall'integrale

$$E = \int_0^{t_0} Ri^2(t)\mathrm{d}t = \int_0^{t_0} 3\cdot\left[4\,t\,e^{-\frac{t}{2}}\right]^2\mathrm{d}t = \int_0^{t_0} 48\cdot t^2e^{-t}\mathrm{d}t$$

ed è misurata in joule (J).

In conclusione

a) Nel primo caso lo studente deve calcolare la funzione corrente $i(t)$ come derivata rispetto al tempo della carica $q(t)$. Non deve calcolare l'integrale perché conosce già la forma di $Q(t_0) = q(t_0)$;

b) nel secondo caso lo studente conosce dal testo la funzione corrente e quindi non deve calcolare la derivata. Gli è richiesto invece di calcolare un integrale definito per ottenere l'espressione $Q(t_0)$.

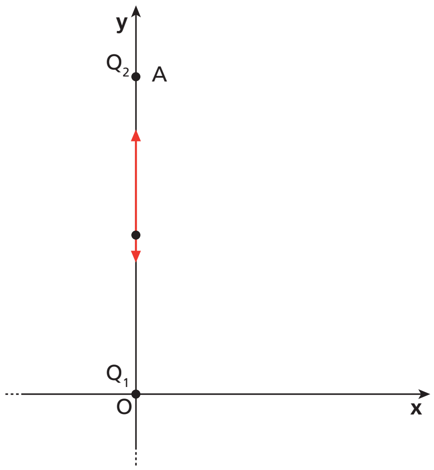
ESEMPIO SECONDA PROVA DI MATEMATICA E FISICA
pubblicato dal MIUR il 28 febbraio 2019

Svolgimento

Problema 2

1 Visto che le due cariche sono poste entrambe sull'asse y, l'unica zona del piano cartesiano in cui il campo elettrico può essere nullo è lo stesso asse y. Infatti, in ogni punto del piano cartesiano posto al di fuori dell'asse y i due vettori campo elettrico hanno direzioni diverse tra loro e quindi la loro somma vettoriale non può essere nulla.

Sull'asse delle ordinate, il campo elettrico totale può essere nullo solo nel segmento compreso tra i punti $O(0;0)$ e $A(0;1)$; infatti entrambe le cariche sono positive, e, quindi, i loro campi elettrici hanno versi opposti solo all'interno di tale segmento. Negli altri punti dell'asse delle ordinate i due campi hanno la stessa direzione e lo stesso verso, per cui la loro somma non può essere nulla.



In un punto $P(0; y)$ del segmento OA la componente lungo y del campo elettrico totale è

$$E_{\text{tot},\,y} = E_{1,\,y} - E_{2,\,y} = k\frac{4q}{y^2} - k\frac{q}{(1-y)^2} = k\,q\left[\frac{4}{y^2} - \frac{1}{(1-y)^2}\right] \qquad (0 < y < 1)$$

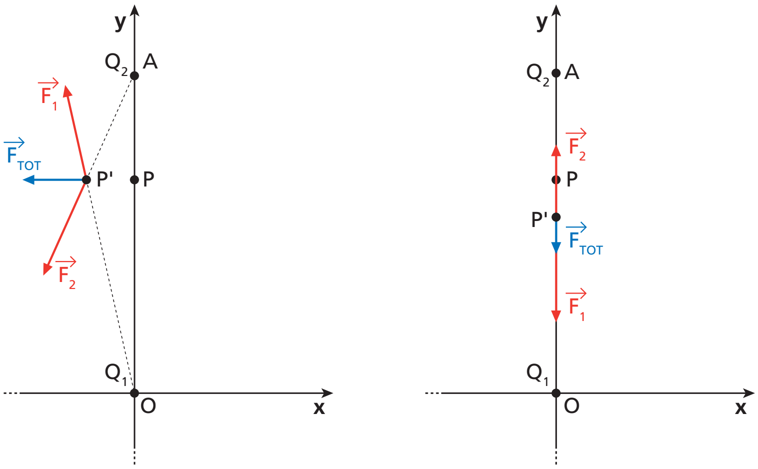
Ponendo uguale a zero l'espressione tra parentesi quadre si ottiene l'equazione di secondo grado

$$4\,(1-y)^2 - y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3y^2 - 8y + 4 = 0$$

che ha come soluzioni $y_1 = 2/3$ e $y_2 = 2$. Di queste solo la prima soluzione è accettabile in quanto compresa tra 0 e 1. Quindi, come dice il testo del problema, è confermato che esiste solo un punto in cui il campo elettrico totale è nullo, ed è il punto $P\left(0; \frac{2}{3}\right)$.

Se poniamo in P una terza carica, essa si trova in una situazione di equilibrio instabile. Per esempio, spostando una terza carica positiva in direzione parallela all'asse x, su di essa agirebbe una forza obliqua che tenderebbe ad allontanarla da P.

Come secondo esempio, se si sposta una terza carica negativa verso il basso si ottiene che la forza attrattiva verso Q_1 diviene più intensa di quella verso Q_2, per cui anche in questo caso la terza carica si allontana da P.



2 Indichiamo con $B(x;1)$ il generico punto in cui si trova la carica Q_2. La distanza tra le due cariche è, quindi, $r = \overline{OB} = \sqrt{1+x^2}$.

Quindi l'energia potenziale del sistema di due cariche risulta

$$\mathscr{U}(x) = k\frac{Q_1\,Q_2}{r} = k\frac{4\,q^2}{\sqrt{1+x^2}}.$$

In coerenza con il testo della prova, in tutta la trattazione è stata sottintesa l'unità di misura delle lunghezze, cioè il metro.

3 La funzione $\mathscr{U} = \frac{4kq^2}{\sqrt{1+x^2}}$ è definita in tutto $\mathbb{R}$ ed è pari, dunque il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse x. La funzione è sempre positiva e interseca l'asse y nel punto $(0; 4kq^2)$.

Il grafico ha come asintoto orizzontale sia destro, sia sinistro l'asse x: infatti, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4kq^2}{\sqrt{1+x^2}} = 0$.

Studiamo ora la derivata prima di $\mathscr{U}(x) = 4kq^2\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$:

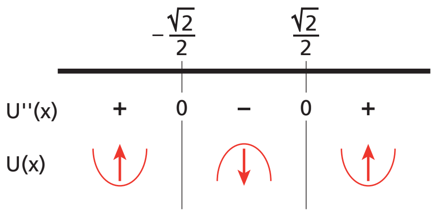
$$\mathscr{U}'(x) = -2kq^2\left(1+x^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x = \frac{-4kq^2x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$$

che ha lo stesso segno di $-x$: dunque la funzione è crescente per $x<0$, decrescente per $x>0$ e ha il massimo assoluto in $x=0$.

Studiamo la derivata seconda di $\mathscr{U}(x)$, derivando $\mathscr{U}' = -4kq^2x\left(1+x^2\right)^{-\frac{3}{2}}$:

$$\mathscr{U}''(x) = -4kq^2\left[\left(1+x^2\right)^{-\frac{3}{2}} + x\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\left(1+x^2\right)^{-\frac{5}{2}}\cdot 2x\right] = \frac{4kq^2(2x^2-1)}{\sqrt{(1+x^2)^5}}$$

Dunque $\mathscr{U}''(x) > 0$ se $2x^2-1>0$, cioè se $x < -\frac{\sqrt{2}}{2} \vee x > \frac{\sqrt{2}}{2}$.



Dunque ci sono due punti di flesso per $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, di coordinate

$$F_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{4kq^2\sqrt{6}}{3}\right) \quad \text{e} \quad F_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{4kq^2\sqrt{6}}{3}\right)$$

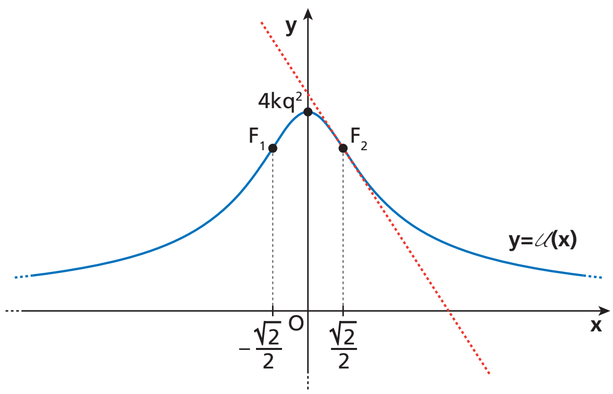
Determiniamo i coefficienti angolari delle tangenti in F_1 e F_2:

$$m_2 = \mathscr{U}'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{8kq^2\sqrt{3}}{9}$$

che è la pendenza in F_2.
Per simmetria, il coefficiente angolare della tangente in F_1 è

$$m_1 = -m_2 = \frac{8kq^2\sqrt{3}}{9}$$

Il grafico di $\mathscr{U}(x)$ è dunque questo:



4 La funzione $\mathscr{U}'(x) = -4kq^2\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$ è dispari nel dominio $\mathbb{R}$. Infatti si può dimostrare che la derivata di una funzione pari è dispari.

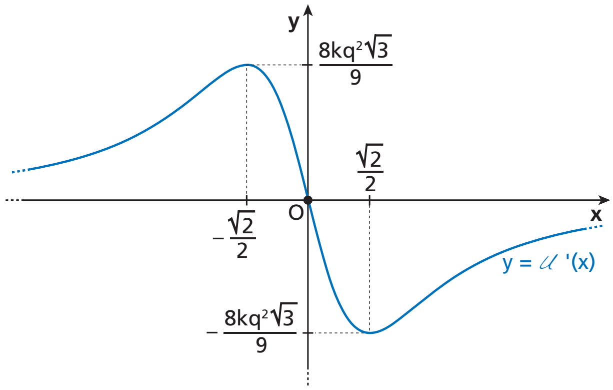
$\mathscr{U}'(x)$ interseca gli assi cartesiani solo nell'origine, è positiva per $x < 0$ dove $\mathscr{U}(x)$ è crescente, è negativo per $x > 0$ dove $\mathscr{U}(x)$ è decrescente.

Poiché $\lim_{x\to\pm\infty}\left(-4kq^2\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\right) = 0$, $\mathscr{U}'(x)$ ha per asintoto orizzontale sia destro, sia sinistro l'asse x.

$\mathscr{U}'(x)$ è crescente dove $\mathscr{U}(x)$ ha la concavità verso l'alto, cioè per $x < -\frac{\sqrt{2}}{2} \vee x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ ed è decrescente dove $\mathscr{U}(x)$ ha la concavità rivolta verso il basso, cioè per $-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Quindi ha massimo assoluto in $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, che vale $M = \mathscr{U}'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{8kq^2\sqrt{3}}{9}$, e un minimo assoluto nel punto simmetrico rispetto all'origine.

Il grafico di $\mathscr{U}'(x)$ è dunque:



$\mathscr{U}'(x)$ è una funzione dispari e continua su tutta $\mathbb{R}$ e quindi integrabile in tutto $\mathbb{R}$.

Ne segue che il suo integrale definito su qualunque intervallo del tipo $[-a; a]$ è nullo, e in particolare

$$\int_{-m}^{m} \mathscr{U}'(x)\, dx = 0.$$

ESEMPIO SECONDA PROVA DI MATEMATICA E FISICA
pubblicato dal MIUR il 28 febbraio 2019

Svolgimento

Quesito 1

Imponiamo, innanzitutto, che la funzione g sia continua in $x = 1$, calcolando il limite destro e sinistro per x che tende a 1 e uguagliandoli tra loro e al valore della funzione in 1:

$$g(1) = \lim_{x\to1^-}(3 - ax^2) = \lim_{x\to1^+}\frac{b}{x-3} \quad \Rightarrow \quad 3 - a = -\frac{b}{2} \quad \Rightarrow \quad b = 2a - 6.$$

Studiamo ora la derivabilità di $g(x)$:

$$g'(x) = \begin{cases} -2ax, \ x < 1 \\ -\dfrac{b}{(x-3)^2}, \ x > 1. \end{cases}$$

Poniamo

$$\lim_{x\to1^-}(-2ax) = \lim_{x\to1^+}\left(-\frac{b}{(x-3)^2}\right) \quad \Rightarrow \quad -2a = -\frac{b}{4} \quad \Rightarrow \quad b = 8a.$$

Mettiamo a sistema le due condizioni su a e b:

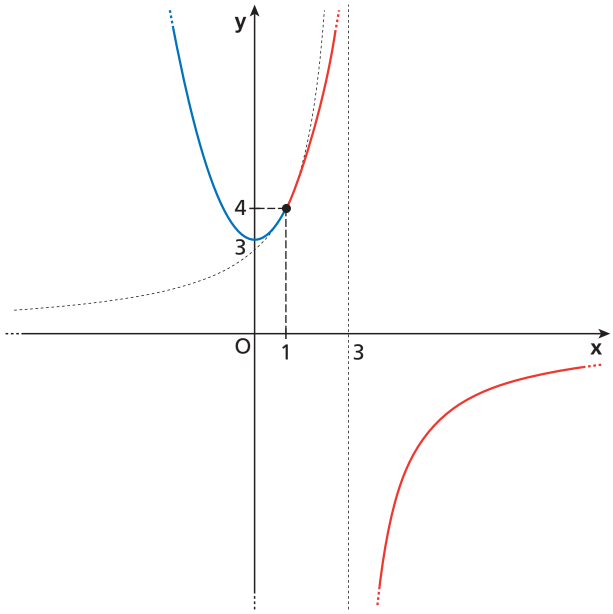
$$\begin{cases} b = 2a - 6 \\ b = 8a \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2a - 6 = 8a \\ b = 8a \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = -1 \\ b = -8 \end{cases}$$

Per tali valori,

$$g(x) = \begin{cases} 3 + x^2, \ x \leq 1 \\ \dfrac{-8}{x-3}, \ x > 1 \wedge x \neq 3 \end{cases} \quad \text{e } g'(x) = \begin{cases} 2x, \ x \leq 1 \\ \dfrac{8}{(x-3)^2}, \ x > 1 \wedge x \neq 3 \end{cases}$$

Disegniamo il grafico di $g(x)$.
L'equazione $y = 3 + x^2$ rappresenta una parabola con asse verticale, vertice $V(0;3)$ e passante per $(1;4)$.
L'equazione $y = -\dfrac{8}{x-3}$ è l'equazione di una funzione omografica che ha per grafico l'iperbole equilatera di centro $C(3;0)$, asintoti di equazione $x = 3$ e $y = 0$ e passante per $(1;4)$.

Il grafico di g è dunque questo:



Possiamo osservare dal grafico che la funzione g è continua e derivabile anche in $x = 1$.

Disegniamo il grafico di $g'(x)$.
La funzione di equazione $y = 2x$ ha come grafico la retta passante per l'origine e per il punto $(1; 2)$.
La funzione di equazione $y = \frac{8}{(x-3)^2}$ ha come asintoto verticale la retta $x = 3$, poiché

$$\lim_{x \to 3} \frac{8}{(x-3)^2} = +\infty.$$

Inoltre è una funzione sempre positiva nel dominio.
Essa è crescente per $x < 3$ e decrescente per $x > 3$ poiché la sua derivata prima è la derivata seconda di $y = -\frac{8}{x-3}$, che è positiva per $x < 3$ (dove la concavità dell'iperbole è rivolta verso l'alto) e negativa per $x > 3$ (dove la concavità dell'iperbole è rivolta verso il basso).
La funzione definita per casi g' è continua anche in $x = 1$. Infatti

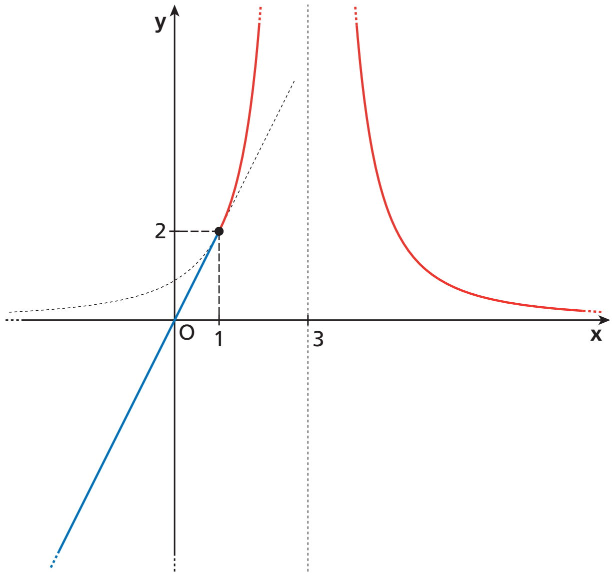
$$g'(1) = 2 = \lim_{x \to 1} \frac{8}{(x-3)^2}$$

g' è anche derivabile in $x = 1$. Infatti:

$$g''(x) = \begin{cases} 2, \; x < 1 \\ \dfrac{-16}{(x-3)^3}, \; x > 1 \wedge x \neq 3 \end{cases} \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 1^-} 2x = 2 = \lim_{x \to 1^+} \frac{-16}{(x-3)^3} = 2$$

Dunque $g''(1) = 2$.

In conclusione, il grafico di g'' è questo:

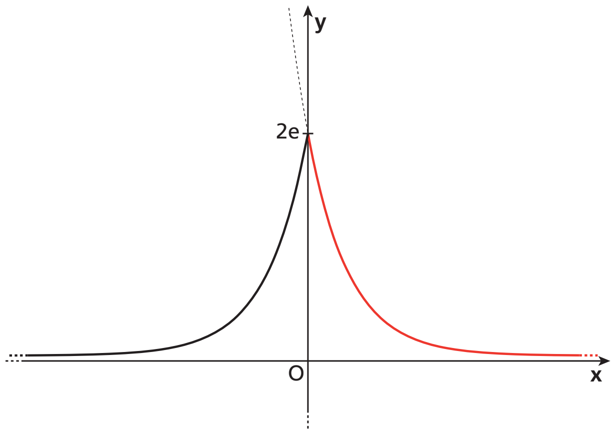


ESEMPIO SECONDA PROVA DI MATEMATICA E FISICA
pubblicato dal MIUR il 28 febbraio 2019

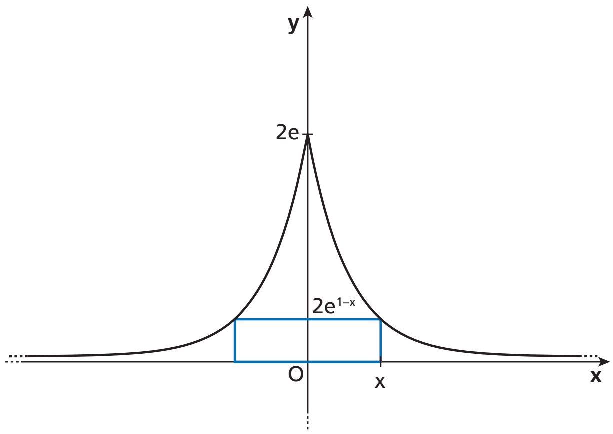
Svolgimento

Quesito 2

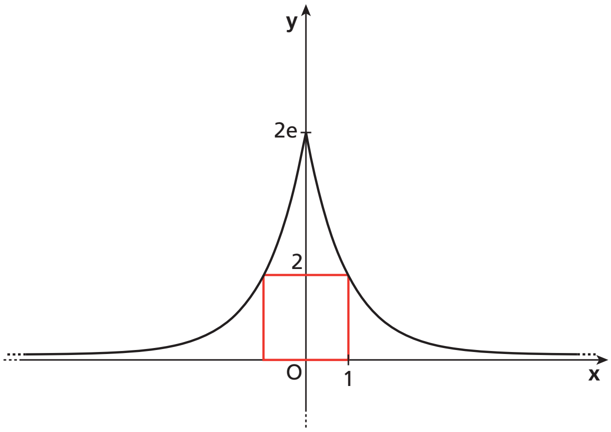
La funzione di equazione $y = 2e^{1-|x|}$ è una funzione pari.
Per $x \geq 0$, si ottiene l'equazione $y = 2e^{1-x} = 2e \cdot e^{-x}$, il cui grafico è quello di un esponenziale decrescente dilatato verticalmente, passante per $(0; 2e)$, con asintoto orizzontale l'asse x.
Il grafico di $y = 2e^{1-|x|}$ è dunque:



Inscriviamo un generico rettangolo nella regione considerata:



Sia x l'ascissa del vertice di coordinate $(x; 0)$ con $x \geq 0$.
L'area del rettangolo vale $A(x) = 2 \cdot x \cdot 2e^{1-x} = 4xe^{1-x}$, con $x > 0$.
La derivata vale $A'(x) = 4(e^{1-x} - xe^{1-x}) = 4e^{1-x}(1 - x)$, che è positiva per $x \in]0; 1[$, negativa per $x > 1$ e si annulla in $x = 1$. Dunque l'area massima si ottiene per $x = 1$.
In questo caso la base del rettangolo vale 2 e l'altezza $2e^{1-1} = 2$, quindi si tratta di un quadrato:



Il perimetro del generico rettangolo inscritto vale

$$2p(x) = 4x + 2 \cdot 2e^{1-x} = 4(x + e^{1-x})$$

la cui derivata vale

$$2p'(x) = 4(1 - e^{1-x})$$

che è positiva se $e^{1-x} < 1$, cioè se $1 - x < 0$, cioè se $x > 1$.
In $x = 1$ si annulla, per poi diventare negativa per $x < 1$.
Dunque il perimetro minimo si ottiene nella stessa situazione in cui si ha l'area massima, ossia nel caso in cui il rettangolo sia un quadrato.

Quesito 3

La probabilità che la prima pallina estratta sia la numero 10 vale 1/16, mentre la probabilità che venga estratta una pallina con un numero minore di 10 vale 9/16. La probabilità richiesta è quindi

$$p_1 = \frac{1}{16} \cdot \frac{9}{16} \cdot \frac{9}{16} = \frac{9^2}{16^3} = \frac{81}{4096} \approx 1,98\%$$

Un primo modo per calcolare la probabilità p_2 richiesta è l'approccio classico, per cui le possibili cinquine estratte contemporaneamente sono

$$C_{16,5} = \binom{16}{5} = \frac{16!}{11!\,5!} = 4362$$

Invece i casi favorevoli sono le cinquine che contengono il numero 13 come numero massimo, e in cui le rimanenti quattro palline hanno numeri compresi tra 1 e 12. Tale numero è uguale al numero di quaterne scelte tra 12 palline, cioè

$$C_{12,4} = \binom{12}{4} = \frac{12!}{8!\,4!} = 495$$

La probabilità richiesta vale dunque

$$p_2 = \frac{C_{12,4}}{C_{16,5}} = \frac{495}{4362} = \frac{165}{1456} \approx 11,3\%$$

Un secondo modo per calcolare p_2 può essere quello di pensare di estrarre le 5 palline una alla volta, senza reimbussolamento e senza considerare l'ordine di estrazione.
In questo caso si ottiene

$$p_2 = \binom{5}{1} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{12}{15} \cdot \frac{11}{14} \cdot \frac{10}{13} \cdot \frac{9}{12} = \frac{165}{1456} \approx 11,3\%$$

dove il coefficiente $\binom{5}{1}$ rappresenta le cinque possibili posizioni di uscita del numero 13 e gli altri fattori rappresentano le probabilità di uscita di altri 4 numeri inferiori al 13.

ESEMPIO SECONDA PROVA DI MATEMATICA E FISICA
pubblicato dal MIUR il 28 febbraio 2019

Svolgimento

Quesito 4

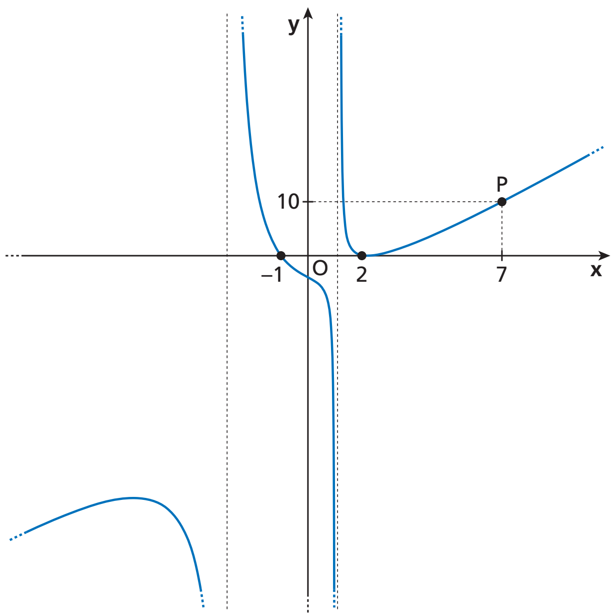
Il polinomio $s(x)$ deve annullarsi per $x = -1$ e per $x = 2$, e quest'ultima radice deve avere molteplicità almeno 2.
Il polinomio $t(x)$ deve annullarsi per $x = -3$ e $x = 1$.
La più semplice funzione che soddisfa le richieste del quesito è del tipo:

$$y = a\frac{(x+1)(x-2)^2}{(x-1)(x+3)}, \qquad \text{con } a \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

Ricaviamo il parametro a in modo che valga anche la terza condizione $y(7) = 10$:

$$10 = a \cdot \frac{8 \cdot 5^2}{6 \cdot 10} \quad \Rightarrow \quad a = 3$$

La funzione $y = 3\dfrac{(x+1)(x-2)^2}{(x-1)(x+3)}$ risponde a tutte le richieste del quesito.
Va sottolineato, naturalmente, che tale funzione non è l'unica possibile.
Il grafico della funzione è il seguente:



Quesito 5

Riscriviamo l'equazione della superficie sferica completando i quadrati:

$$(x-1)^2 + y^2 + (z+3)^2 = 1 + 9 \quad \Rightarrow \quad (x-1)^2 + y^2 + (z+3)^2 = 10$$

Il centro della superficie sferica è quindi $C(1; 0; -3)$ e il raggio vale $R = \sqrt{10}$.
Calcoliamo la distanza tra il centro C e il piano π:

$$d(C; \pi) = \frac{\left|3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 + 6 \cdot (-3) + 1\right|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 6^2}} = \frac{|-14|}{7} = 2$$

Poiché $2 < \sqrt{10}$, la superficie S e il piano π sono secanti in una circonferenza.
Tale circonferenza, per il teorema di Pitagora, ha raggio $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{10 - 4} = \sqrt{6}$.

Quesito 6

Coerentemente con il testo del problema, si è scelto di non introdurre le unità di misura nelle formule, ma solo nei risultati finali.
Il punto materiale si muove secondo la legge oraria $x(t)$ (con $t \geq 0$):

$$x(t) = \frac{1}{9}t^2\left(\frac{1}{3}t + 2\right) \qquad \Rightarrow \qquad x(t) = \frac{1}{27}t^3 + \frac{2}{9}t^2$$

La velocità è data dalla derivata rispetto al tempo di $x(t)$:

$$v(t) = \frac{1}{9}t^2 + \frac{4}{9}t$$

e l'accelerazione è data dalla derivata rispetto al tempo di $v(t)$:

$$a(t) = \frac{2}{9}t + \frac{4}{9}$$

L'accelerazione $a(t)$ non è costante perciò non si tratta di un moto uniformemente accelerato.
La velocità media nei primi 9 secondi di moto è data da

$$\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{45\ \text{m}}{9\ \text{s}} = 5\ \text{m/s}$$

L'istante in cui il punto si muove alla velocità $v(t) = 5$ m/s è

$$5 = \frac{1}{9}t^2 + \frac{4}{9}t \qquad \Rightarrow \qquad t^2 + 4t - 45 = 0$$

che ammette le soluzioni

$$t_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 + 45} = -2 \pm 7 \quad \Rightarrow \quad t_1 = -9\ \text{s}, \quad t_2 = 5\ \text{s}$$

La soluzione $t_1 = -9$ s non è accettabile in quanto negativa, per cui l'istante in cui la velocità vale 5 m/s è $t_2 = 5$ s.

ESEMPIO SECONDA PROVA DI MATEMATICA E FISICA
pubblicato dal MIUR il 28 febbraio 2019

Svolgimento

Quesito 7

a) Nel caso di urto elastico, si conservano la quantità di moto totale e l'energia cinetica totale del sistema:

$$\begin{cases} mv_{1\mathrm{i}} = mv_{1\mathrm{f}} + 3mv_{2\mathrm{f}} \\ \frac{1}{2}mv_{1\mathrm{i}}^2 = \frac{1}{2}mv_{1\mathrm{f}}^2 + \frac{1}{2}\cdot 3mv_{2\mathrm{f}}^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{1\mathrm{i}} = v_{1\mathrm{f}} + 3v_{2\mathrm{f}} \\ v_{1\mathrm{i}}^2 = v_{1\mathrm{f}}^2 + 3v_{2\mathrm{f}}^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{1\mathrm{f}} = v_{1\mathrm{i}} - 3v_{2\mathrm{f}} \\ v_{1\mathrm{i}}^2 = v_{1\mathrm{i}}^2 + 9v_{2\mathrm{f}}^2 - 6v_{1\mathrm{i}}^2v_{2\mathrm{f}}^2 + 3v_{2\mathrm{f}}^2 \end{cases}$$

La velocità finale della sfera 2 è

$$12v_{2\mathrm{f}}^2 - 6v_{1\mathrm{i}}v_{2\mathrm{f}} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{2\mathrm{f}}(2v_{2\mathrm{f}} - v_{1\mathrm{i}}) = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{2\mathrm{f}} = \begin{cases} 0 \\ \dfrac{v_{1\mathrm{i}}}{2} = \dfrac{v}{2} \end{cases}$$

Di cui la soluzione $v_{2\mathrm{f}} = \dfrac{v_{1\mathrm{i}}}{2}$ è quella accettabile. La velocità finale della sfera 1 è

$$v_{1\mathrm{f}} = v_{1\mathrm{i}} - \frac{3}{2}v_{1\mathrm{i}} = -\frac{1}{2}v_{1\mathrm{i}} = -\frac{v}{2}$$

il segno "−" significa che la sfera 1 torna indietro.

b) Se l'urto è completamente anelastico non si conserva l'energia cinetica iniziale e le due sfere rimangono attaccate. Si conserva solo la quantità di moto totale. Indicando con v la velocità iniziale della sfera 1 e con V la velocità finale del sistema formato dalle due sfere, si ha:

$$mv = (m + 3m)V \quad \Rightarrow \quad mv = 4mV \quad \Rightarrow \quad V = \frac{v}{4}$$

L'energia cinetica finale del sistema è

$$E_\mathrm{f} = \frac{1}{2}\cdot 4mV^2 = 2m\frac{v^2}{16} = \frac{1}{8}mv^2$$

e l'energia cinetica iniziale è

$$E_\mathrm{i} = \frac{1}{2}mv^2$$

L'energia dissipata è quindi

$$\Delta E = E_\mathrm{f} - E_\mathrm{i} = \frac{1}{8}mv^2 - \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{3}{8}mv^2$$

Quesito 8

Il campo magnetico considerato varia nel tempo secondo la legge

$$B(t) = B_0(2 + \mathrm{sen}(\omega t))$$

Il campo è perpendicolare al quadrato delimitato dal circuito di area l^2. Pertanto il flusso di campo magnetico attraverso la spira è

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = Bl^2 = B_0 l^2 (2 + \mathrm{sen}(\omega t))$$

La forza elettromotrice indotta è perciò

$$\mathrm{fem} = -\frac{d\Phi}{dt} = -B_0 l^2 \omega \cos(\omega t)$$

L'intensità di corrente indotta nel circuito nell'istante t è

$$i = \frac{\mathrm{fem}}{R} = -\frac{B_0 l^2 \omega}{R} \cos(\omega t)$$

Le unità di misura delle grandezze coinvolte sono

B	$\rightarrow$	tesla [T]
ω	$\rightarrow$	radianti al secondo [rad/s]
Φ	$\rightarrow$	weber [Wb]
fem	$\rightarrow$	volt [V]
i	$\rightarrow$	ampere [A]

