SIMULAZIONE ZANICHELLI 2019

DELLA PROVA DI MATEMATICA E FISICA DELL'ESAME DI STATO

PER IL LICEO SCIENTIFICO

Risoluzione

Problema 1

1. La funzione $i(t)$ è una funzione definita a tratti costituita da una funzione costante $i_1(t) = 2$ e da una funzione polinomiale $i_2(t) = t^3 + at^2 + bt + c$ entrambe continue e derivabili nel loro dominio naturale $\mathbb{R}$. Possiamo quindi concludere che $i(t)$ è sicuramente continua e derivabile in tutti i punti dell'intervallo $[0; 5]$, escluso al più il punto $t = 2$, punto di separazione dei due intervalli di definizione.

Affinché $i(t)$ sia continua anche in $t = 2$ deve essere, in base alla definizione di funzione continua:

$$\lim_{t\to 2^-} i(t) = \lim_{t\to 2^+} i(t) = i(2);$$

poiché $i(t) = i_1(t)$ in $[0; 2]$ e $i(t) = i_2(t)$ in $]2; 5]$, abbiamo:

$$\lim_{t\to 2^-} i(t) = i(2) = i_1(2) = 2,$$

$$\lim_{t\to 2^+} i(t) = \lim_{t\to 2^+} i_2(t) = \lim_{t\to 2^+} (t^3 + at^2 + bt + c) = 2^3 + a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c,$$

e quindi la condizione per la continuità di $i(t)$ in $t = 2$ è:

$$2 = 4a + 2b + c + 8 \longrightarrow 4a + 2b + c + 6 = 0.$$

Se $i(t)$ è continua in $t = 2$, per il criterio di derivabilità $i(t)$ è derivabile in $t = 2$ se:

$$\lim_{t\to 2^-} i'(t) = \lim_{t\to 2^+} i'(t).$$

Abbiamo:

$$\lim_{t\to 2^-} i'(t) = \lim_{t\to 2^-} i_1{}'(t) = \lim_{t\to 2^-} 0 = 0,$$

$$\lim_{t\to 2^+} i'(t) = \lim_{t\to 2^+} i_2{}'(t) = \lim_{t\to 2^+} (3t^2 + 2at + b) = 3 \cdot 2^2 + 2a \cdot 2 + b,$$

e quindi la condizione per la derivabilità di $i(t)$ in $t = 2$ è:

$$4a + b + 12 = 0.$$

Inoltre deve essere $i(3) = 0$, cioè:

$$3^3 + a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = 0 \longrightarrow 9a + 3b + c + 27 = 0.$$

Risolvendo il sistema formato dalle tre condizioni, otteniamo i valori dei parametri a, b e c.

$$\begin{cases} 4a + 2b + c + 6 = 0 \\ 4a + b + 12 = 0 \\ 9a + 3b + c + 27 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a = -9 \\ b = 24 \\ c = -18 \end{cases}.$$

La funzione cercata risulta dunque la seguente:

$$i(t) = \begin{cases} 2 & \text{se } 0 \le t \le 2 \\ t^3 - 9t^2 + 24t - 18 & \text{se } 2 < t \le 5 \end{cases}.$$

Questo file è un'estensione dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Graziella Barozzi e Anna Trifone e dei corsi di fisica di Ugo Amaldi; John D Cutnell, Kenneth W Johnson; David Halliday, Robert Resnick, Jearl Walker; Claudio Romeni.
Hanno collaborato Andrea Betti, Lorenzo Meneghini, Steave Selvaduray e Pietro Velonà.

2. La funzione $i(t)$ è continua in $[2;5]$ e derivabile in $]2;5[$; inoltre $i(2) = i(5) = 2$. Valgono dunque le ipotesi del teorema di Rolle per $i(t)$ nell'intervallo $[2;5]$ e questo assicura che esiste almeno un valore $\bar{t}$ con $2 < \bar{t} < 5$ tale che $i'(\bar{t}) = 0$.

Studiamo la funzione $i(t)$.

- La funzione è definita in $[0;5]$ e il suo grafico non presenta quindi simmetrie rispetto agli assi.
- Il grafico interseca l'asse delle ordinate in $(0;2)$. Cerchiamo le intersezioni con l'asse delle ascisse; dobbiamo risolvere l'equazione:

$$t^3 - 9t^2 + 24t - 18 = 0, \text{con } 2 < t \leq 5.$$

Il polinomio di terzo grado si annulla per $t = 3$ e procediamo con la regola di Ruffini per scomporlo.

	1	–9	24	–18
3		3	–18	18
	1	–6	6	0

Otteniamo:

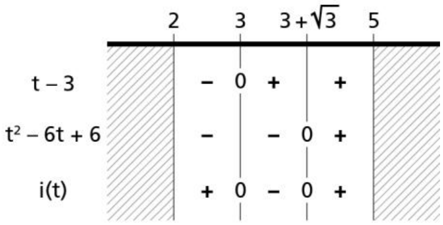
$$t^3 - 9t^2 + 24t - 18 = 0 \longrightarrow (t-3)(t^2 - 6t + 6) = 0.$$

Cerchiamo gli zeri del polinomio di secondo grado:

$$t = \frac{3 \pm \sqrt{9-6}}{1} = 3 \pm \sqrt{3} \longrightarrow t_1 = 3 - \sqrt{3} \vee t_2 = 3 + \sqrt{3}.$$

La soluzione t_1 non è accettabile perché minore di 2; t_2 è invece accettabile.
Concludiamo che il grafico della funzione interseca l'asse delle ascisse in $t = 3$ e in $t = 3 + \sqrt{3}$.

- Per quanto riguarda il segno, $i(t)$ è positiva in $[0;2]$, dove ha valore costante 2.
In $[2;5]$ la funzione $i(t) = (t-3)(t^2 - 6t + 6)$ è negativa per $3 < t < 3 + \sqrt{3}$ e positiva altrove, come schematizzato nel quadro dei segni.



- La derivata prima $i'(t)$ è:

$$i'(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq t \leq 2 \\ 3t^2 - 18t + 24 & \text{se } 2 < t \leq 5 \end{cases}.$$

Poiché $3t^2 - 18t + 24 = 3(t-2)(t-4)$, la derivata prima si annulla, oltre che per ogni $t \in [0;2]$, anche in $t = 4$; è negativa in $]2;4[$, intervallo in cui $i(t)$ è decrescente, e positiva in $]4;5[$, dove $i(t)$ è crescente. In $t = 4$ il grafico di $i(t)$ presenta un minimo relativo e assoluto di valore $i(4) = -2$.

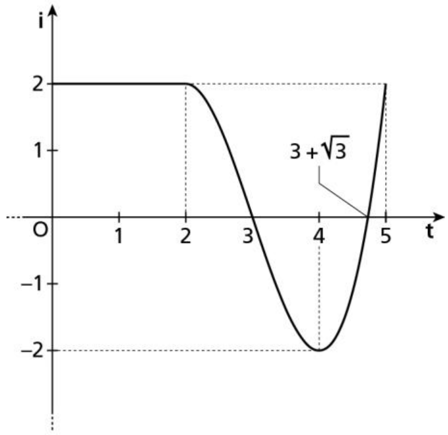
Questo file è un'estensione dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Graziella Barozzi e Anna Trifone e dei corsi di fisica di Ugo Amaldi; John D Cutnell, Kenneth W Johnson; David Halliday, Robert Resnick, Jearl Walker; Claudio Romeni.
Hanno collaborato Andrea Betti, Lorenzo Meneghini, Steave Selvaduray e Pietro Velonà.

- La derivata seconda

$$i''(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq t < 2 \\ 6t - 18 & \text{se } 2 < t \leq 5 \end{cases}$$

è nulla in $[0; 2[$, negativa in $]2; 3[$, dove il grafico della funzione ha la concavità verso il basso, e positiva in $]3; 5[$, dove il grafico di $i(t)$ volge la concavità verso l'alto.

Disegniamo il grafico della funzione $i(t)$.



3. Indichiamo con γ una linea chiusa, con S_γ una superficie (aperta) che ha la curva γ come contorno, con $\Gamma_\gamma(\vec{E})$ la circuitazione del campo elettrico $\vec{E}$ lungo la linea γ e con $\Phi_{S_\gamma}(\vec{B})$ il flusso del campo magnetico $\vec{B}$ attraverso la superficie S_γ. L'equazione di Maxwell relativa alla circuitazione del campo elettrico afferma che:

$$\Gamma_\gamma(\vec{E}) = -\frac{d\Phi_{S_\gamma}(\vec{B})}{dt}.$$

Applichiamo questa equazione alla situazione descritta nel problema, in cui:

- la linea chiusa γ corrisponde alla spira;
- la superficie S_γ corrisponde alla superficie piana delimitata dalla spira;
- la circuitazione del campo elettrico lungo la linea chiusa γ è, per definizione, uguale alla forza elettromotrice associata alla spira;
- poiché nella spira non sono inseriti generatori, la forza elettromotrice sulla spira è solo f_{em} indotta.

Ritroviamo quindi l'espressione consueta della legge di Faraday-Neumann-Lenz:

$$f_{em} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}.$$

Inoltre nel problema il campo magnetico è perpendicolare al piano della spira, quindi il flusso del campo magnetico attraverso la superficie della spira è $\Phi(\vec{B}) = B(t) \cdot l^2$, e pertanto:

$$f_{em} = -\frac{d(B(t) \cdot l^2)}{dt} = -l^2 \frac{dB(t)}{dt}.$$

Questo file è un'estensione dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Graziella Barozzi e Anna Trifone e dei corsi di fisica di Ugo Amaldi; John D Cutnell, Kenneth W Johnson; David Halliday, Robert Resnick, Jearl Walker; Claudio Romeni.
Hanno collaborato Andrea Betti, Lorenzo Meneghini, Steave Selvaduray e Pietro Velonà.

Infine, dato che la spira è conduttrice e ha resistenza R, nella spira circola una corrente indotta $i(t)$ e per la prima legge di Ohm:

$$f_{em} = R \cdot i(t).$$

Sostituendo nell'espressione della legge di Faraday-Neumann-Lenz, si ha

$$R \cdot i(t) = -l^2 \cdot \frac{dB(t)}{dt} \longrightarrow \frac{dB(t)}{dt} = -\frac{R}{l^2} \cdot i(t)$$

e dunque vale una relazione del tipo

$$\frac{dB(t)}{dt} = -k \cdot i(t)$$

dove

$$k = \frac{R}{l^2}.$$

La costante k è il rapporto tra una resistenza e una superficie, quindi ha le dimensioni fisiche di una resistenza elettrica per una lunghezza elevata a −2:

$$[k] = \frac{[R]}{[L^2]} = [R][L^{-2}]$$

e la sua unità di misura è:

$$\frac{\Omega}{\mathrm{m}^2}.$$

Posto l = 40 cm = 0,4 m e R = 0,16 Ω, k assume il valore:

$$k = \frac{0{,}16}{0{,}4^2} = 1\ \frac{\Omega}{\mathrm{m}^2}.$$

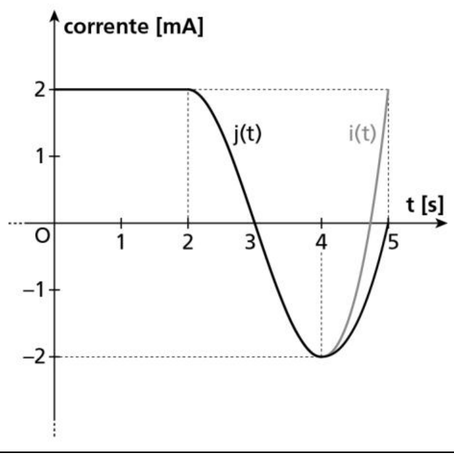
4. La funzione $j(t)$ assume i valori:

$$j(0) = 2, \qquad j(2) = 2, \qquad j(3) = 0, \qquad j(4) = -2, \qquad j(5) = 0,$$

mentre la funzione $i(t)$ assume i valori:

$$i(0) = 2, \qquad i(2) = 2, \qquad i(3) = 0, \qquad i(4) = -2, \qquad i(5) = 2.$$

Come si vede da un confronto tra i grafici, la funzione $j(t)$ approssima in una certa misura l'andamento della funzione $i(t)$ nell'intervallo [0; 5]. L'approssimazione risulta migliore nell'intervallo [0; 4].



Questo file è un'estensione dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Graziella Barozzi e Anna Trifone e dei corsi di fisica di Ugo Amaldi; John D Cutnell, Kenneth W Johnson; David Halliday, Robert Resnick, Jearl Walker; Claudio Romeni.
Hanno collaborato Andrea Betti, Lorenzo Meneghini, Steave Selvaduray e Pietro Velonà.

L'effetto Joule è determinato dalla dissipazione termica della potenza sviluppata dalla f.e.m. indotta secondo la relazione:

$$\frac{dW}{dt} = P(t) = R \cdot i^2(t) \simeq R \cdot j^2(t).$$

Per ricavare l'energia totale W dissipata nei primi 5 secondi dobbiamo integrare la potenza rispetto al tempo:

$$W = R\int_0^5 j^2(t)dt = 0{,}16\left[\int_0^2 4dt + \int_2^5 4\cos^2\left(\frac{\pi}{2}t\right)dt\right] = 0{,}16\left\{8 + 4\int_2^5 \cos^2\left(\frac{\pi}{2}t\right)dt\right\}.$$

Calcoliamo separatamente l'integrale della funzione goniometrica con cambio di variabile $\frac{\pi}{2}t = x$; osservato che $\int \cos^2 x\, dx$ si calcola integrando per parti oppure ricordando che $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, otteniamo:

$$\int_2^5 \cos^2\left(\frac{\pi}{2}t\right)dt = \frac{2}{\pi}\int_{\pi}^{\frac{5}{2}\pi} \cos^2 x\, dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2}[x + \sin x\cos x]_{\pi}^{\frac{5}{2}\pi} = \frac{3}{2}.$$

Riprendiamo allora il calcolo di W:

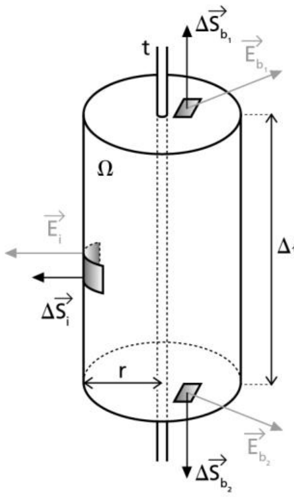
$$W = 0{,}16\left(8 + 4\cdot\frac{3}{2}\right) = 2{,}24.$$

Per l'unità di misura osserviamo che la corrente $j(t)$ è espressa in mA, cioè presenta un fattore 10^{-3} rispetto all'unità fondamentale ampere del S.I., e $j(t)$ compare al quadrato nell'integrale, quindi nel risultato dobbiamo considerare un fattore $(10^{-3})^2 = 10^{-6}$ rispetto all'unità base J (joule) del S.I.
Risulta quindi:

$$W = 2{,}24 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{J} = 2{,}24\ \mu\mathrm{J}.$$

Problema 2

1. Per determinare il modulo del campo elettrico è conveniente utilizzare una superficie cilindrica Ω di raggio r, di altezza Δl e con l'asse di simmetria su t.



Sulle due basi del cilindro, i vettori superficie sono ovunque perpendicolari ai corrispondenti vettori campo elettrico, per cui il flusso di campo elettrico attraverso di esse è nullo. Sulla superficie laterale del cilindro, i vettori campo elettrico hanno modulo costante. Dividiamo quindi la superficiale laterale in n porzioni descritte dai vettori $\Delta\vec{S}_i$ e indichiamo con $\vec{E}_i$ il vettore campo elettrico (con modulo uniforme E) nei punti di $\Delta\vec{S}_i$. Notiamo allora che i vettori $\vec{E}_i$ e $\Delta\vec{S}_i$ sono paralleli tra loro, per cui il flusso di campo elettrico risulta:

$$\Phi_\Omega(\vec{E}) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{S}_i = E \lim_{n\to+\infty} \Delta S_i = E(2\pi r \Delta l).$$

Allora in questo caso il teorema di Gauss si scrive come:

$$\Phi_\Omega(\vec{E}) = 2\pi r \Delta l |\vec{E}| = \frac{\Delta Q}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda \Delta l}{\varepsilon_0}.$$

Uguagliando il secondo e il quarto termine della precedente catena di uguaglianze, otteniamo la relazione cercata:

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{r}.$$

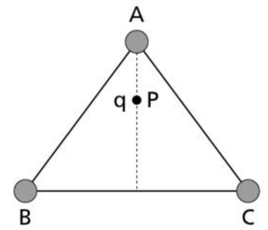
Per le classi che conoscono gli integrali di superficie, la dimostrazione basata sul teorema di Gauss diventa:

$$\frac{\lambda \Delta l}{\varepsilon_0} = \Phi_\Omega(\vec{E}) = \oint_\Omega \vec{E}(P) \cdot d\vec{S} = \oint_\Omega |\vec{E}| dS = |\vec{E}| \oint_\Omega dS = |\vec{E}| 2\pi r \Delta l,$$

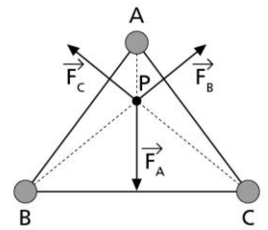
da cui si deduce la formula del modulo del campo elettrico.

2. a) Analisi delle forze

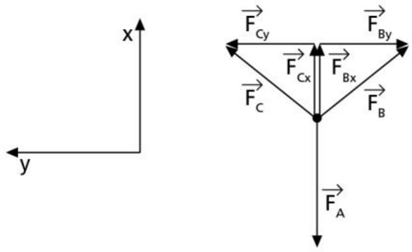
Disegniamo i tre fili e una carica $q > 0$ in un punto P dell'altezza del triangolo condotta da A.



Se indichiamo con $\vec{F}_A$, $\vec{F}_B$ e $\vec{F}_C$ le forze che i tre fili passanti per A, B e C esercitano su q in P, esse hanno direzione lungo le congiungenti AP, BP e CP e verso uscente.



Le forze $\vec{F}_B$ e $\vec{F}_C$ hanno lo stesso modulo che dipende dalla distanza tra il filo e il punto P. Scomponiamo le tre forze lungo la direzione dell'altezza, asse x, e lungo una direzione perpendicolare ad essa, asse y.



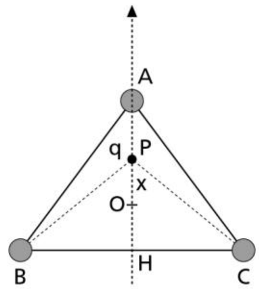
Dunque abbiamo:

$$\vec{F}_{Cy} = -\vec{F}_{By}.$$

Pertanto, la risultante delle forze $\vec{R}$ è parallela all'altezza relativa al lato BC e quindi otteniamo:

$$\vec{R} = \vec{F}_{Bx} + \vec{F}_{Cx} + \vec{F}_{A}. \tag{1}$$

b) Espressione della componente della risultante lungo l'asse
Fissiamo l'asse x con l'origine O nel baricentro del triangolo e rivolto verso A; indichiamo con x l'ascissa della carica q, ovvero $\overline{OP} = x$.



La (1), in componenti, diventa:

$$R_x = F_{Bx} + F_{Cx} - F_A$$

ed essendo $F_{Bx} = F_{Cx}$ abbiamo:

$$R_x = 2F_{Bx} - F_A.$$

Ricaviamo F_A dalla relazione:

$$F_A = \frac{\lambda q}{2\pi\varepsilon_0 \overline{AP}}. \tag{2}$$

Visto che la misura dell'altezza $\overline{AH}$ è data da:

$$\overline{AH} = \overline{AC}\sin\frac{\pi}{3} = 2l\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}l$$

allora la distanza $\overline{AO}$ è uguale a $\frac{2}{3}$ dell'altezza e quindi:

$$\overline{AP} = \overline{AO} - \overline{OP} = \frac{2\sqrt{3}}{3}l - x = \frac{2\sqrt{3}l - 3x}{3}.$$

Sostituiamo ora nella (2) e troviamo:

$$F_A = \frac{\lambda q}{2\pi\varepsilon_0 \frac{2\sqrt{3}l - 3x}{3}} = \frac{3\lambda q}{2\pi\varepsilon_0\left(2\sqrt{3}l - 3x\right)}.$$

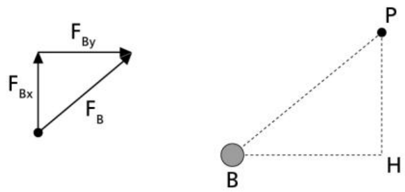
Analogamente F_B si ottiene dalla relazione:

$$F_B = \frac{\lambda q}{2\pi\varepsilon_0 \overline{BP}} \tag{3}$$

dove

$$\overline{BP} = \sqrt{(\overline{BH})^2 + (\overline{HP})^2} = \sqrt{l^2 + \left(x + \frac{\sqrt{3}}{3}l\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{3x^2 + 2\sqrt{3}xl + 4l^2}.$$

Per ottenere la componente F_{Bx}, sfruttiamo la similitudine tra i seguenti triangoli.



$$F_{Bx} : F_B = \overline{HP} : \overline{BP} \longrightarrow F_{Bx} = F_B \frac{\overline{HP}}{\overline{BP}}$$

Tenendo conto della (3), otteniamo:

$$F_{Bx} = \frac{\lambda q}{2\pi\varepsilon_0 (\overline{BP})^2}\overline{HP} = \frac{\lambda q}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{3x + \sqrt{3}l}{3x^2 + 2\sqrt{3}xl + 4l^2}.$$

Pertanto la componente lungo x di $\vec{R}$ è data da:

$$R_x = 2F_{Bx} - F_A = \frac{\lambda q}{\pi\varepsilon_0} \cdot \left[\frac{3x + \sqrt{3}l}{3x^2 + 2\sqrt{3}xl + 4l^2} - \frac{3}{2\left(2\sqrt{3}l - 3x\right)}\right]$$

da cui:

$$R_x = \frac{27\lambda q}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{x^2}{\left(3x^2 + 2\sqrt{3}xl + 4l^2\right) \cdot \left(3x - 2\sqrt{3}l\right)} = \frac{27\lambda q}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{x^2}{9x^3 - 8\sqrt{3}l^3} = R(x).$$

3. Studio della funzione $f(X)$

Poniamo:

$$X \equiv \frac{\sqrt{3}x}{l}.$$

La funzione $R(X)$ diventa:

$$R(X) = \frac{3\sqrt{3}\lambda q}{2\pi\varepsilon_0 l} \cdot \frac{X^2}{X^3 - 8}.$$

Poniamo:

$$a \equiv \frac{3\sqrt{3}\lambda q}{2\pi\varepsilon_0 l}$$

Questo file è un'estensione dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Graziella Barozzi e Anna Trifone e dei corsi di fisica di Ugo Amaldi; John D Cutnell, Kenneth W Johnson; David Halliday, Robert Resnick, Jearl Walker; Claudio Romeni.
Hanno collaborato Andrea Betti, Lorenzo Meneghini, Steave Selvaduray e Pietro Velonà.

e

$$f(X) \equiv \frac{R(X)}{a}.$$

La funzione da studiare è data da:

$$f(X) = \frac{X^2}{X^3 - 8}.$$

Il dominio della funzione è:

$$D =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[.$$

L'unico punto di intersezione con gli assi è l'origine (quando la carica si trova nel baricentro del triangolo, la risultante delle forze è nulla). Analizziamo quando la funzione è positiva:

$$f(X) > 0 \leftrightarrow X \neq 0 \text{ e } X^3 - 8 > 0 \leftrightarrow X > 2.$$

Calcoliamo i limiti nei punti estremi del dominio:

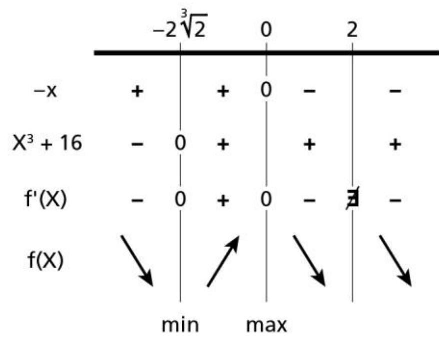
$$\lim_{X \to \pm\infty} f(X) = 0; \qquad \lim_{X \to 2^{\pm}} f(X) = \pm\infty.$$

La funzione ammette un asintoto orizzontale di equazione $Y = 0$ e un asintoto verticale di equazione $X = 2$.

L'espressione della funzione derivata prima è:

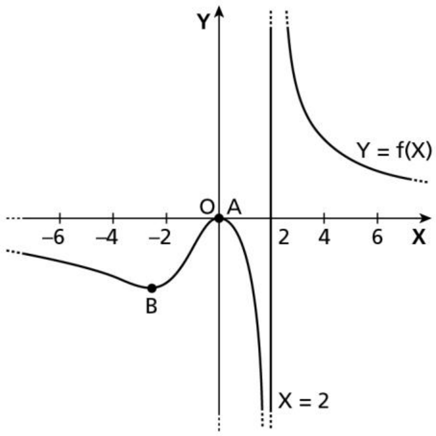
$$f'(X) = \frac{-X \cdot (X^3 + 16)}{(X^3 - 8)^2}.$$

Essa si annulla per $X = 0$ e $X = -\sqrt[3]{16} = -2\sqrt[3]{2}$; il denominatore è sempre positivo, tranne che per $X = 2$ dove la funzione non è definita. Dallo studio del segno della $f'(X)$ otteniamo il seguente diagramma.



$\mathrm{X} = 0$ e $\mathrm{X} = -2\sqrt[3]{2}$ sono rispettivamente il punto di massimo e di minimo relativi alla funzione $f(X)$; sul grafico della funzione essi individuano, rispettivamente, i punti di coordinate $A(0; 0)$ e $B\left(-2\sqrt[3]{2}; -\frac{\sqrt[3]{4}}{6}\right)$.

Di seguito è riportato il grafico della funzione $f(X)$.



4. Calcolo dell'area e del limite

Per ottenere l'area richiesta occorre calcolare il seguente integrale definito:

$$S = \int_{-2\sqrt[3]{2}}^{0} -f(X)dX = -\int_{-2\sqrt[3]{2}}^{0} \frac{X^2}{X^3-8}dX = -\frac{1}{3}\int_{-2\sqrt[3]{2}}^{0} \frac{3X^2}{X^3-8}dx =$$

$$= -\frac{1}{3}[\ln|X^3-8|]_{-2\sqrt[3]{2}}^{0} = -\frac{1}{3}[\ln 8 - \ln 24] = \frac{\ln 3}{3}.$$

Per calcolare il limite proposto, determiniamo il seguente integrale per $X < 0$:

$$\int_X^0 f(z)dz = \int_X^0 \frac{z^2}{z^3-8}dz = \left[\frac{1}{3}\ln|z^3-8|\right]_X^0 = \ln 2 - \frac{1}{3}\ln(8 - \mathrm{X}^3).$$

Di conseguenza, abbiamo:

$$L^* = \lim_{X\to-\infty} \frac{\int_X^0 f(z)dz}{\ln(-2X-1)} = \lim_{X\to-\infty} \frac{\ln 2 - \frac{1}{3}\ln(8-\mathrm{X}^3)}{\ln(-2X-1)}.$$

Si tratta di una forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$. Applichiamo allora la regola di De L'Hospital:

$$L^* = \lim_{X\to-\infty} \frac{-\dfrac{-3X^2}{3(8-\mathrm{X}^3)}}{\dfrac{-2}{-2X-1}} = \lim_{X\to-\infty} \frac{(2X+1)X^2}{2(8-\mathrm{X}^3)} = -1.$$

QUESITI

1. La funzione integranda

$$f(x) = \sqrt{\ln(x^2+1)+4}$$

è definita e continua su tutto $\mathbb{R}$, quindi per il teorema fondamentale del calcolo integrale la funzione integrale

$$y(x) = \int_0^x \sqrt{\ln(t^2+1)+4}\,dt$$

Questo file è un'estensione dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Graziella Barozzi e Anna Trifone e dei corsi di fisica di Ugo Amaldi; John D Cutnell, Kenneth W Johnson; David Halliday, Robert Resnick, Jearl Walker; Claudio Romeni.
Hanno collaborato Andrea Betti, Lorenzo Meneghini, Steave Selvaduray e Pietro Velonà.

è ovunque derivabile in $\mathbb{R}$ con derivata

$$y'(x) = \sqrt{\ln(x^2+1)+4}$$

in tutto $\mathbb{R}$. Anche la funzione assegnata $F(x)$, poiché è somma di funzioni derivabili su $\mathbb{R}$, è derivabile su $\mathbb{R}$ con derivata

$$F'(x) = \frac{1}{2} - \sqrt{\ln(x^2+1)+4}.$$

Questa è ancora una funzione derivabile, con derivata:

$$F''(x) = -\frac{1}{2\sqrt{\ln(x^2+1)+4}} \cdot \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x = -\frac{x}{(x^2+1)\sqrt{\ln(x^2+1)+4}}.$$

La derivata seconda di $F(x)$ si annulla in $x=0$, è negativa per $x>0$ e positiva per $x<0$, quindi la funzione $F(x)$ ha un punto di flesso di ascissa $x=0$. La retta tangente al grafico di $F(x)$ nel suo punto di flesso ha equazione:

$$y - F(0) = F'(0) \cdot (x-0) \longrightarrow y - 2 = \left(\frac{1}{2} - 2\right)x \longrightarrow y = -\frac{3}{2}x + 2.$$

2. Nella scatola le palline nere sono 10, quelle bianche 20.
Calcoliamo le probabilità applicando la definizione classica.
Il numero di estrazioni possibili è:

$$C = \binom{30}{3} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4060.$$

- Probabilità dell'evento A.
  L'evento si verifica se e solo se le palline sono tutte bianche oppure tutte nere.
  Consideriamo gli eventi tra loro incompatibili:
  A_1: «le palline sono tutte bianche»;
  A_2: «le palline sono tutte nere».

  Il numero di casi favorevoli all'evento A_1 è:

  $$N_1 = \binom{20}{3} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1140$$

  e quindi la probabilità di A_1 è:

  $$p(A_1) = \frac{N_1}{C} = \frac{1140}{4060} = \frac{57}{203} \simeq 0{,}281.$$

  Il numero di casi favorevoli all'evento A_2 è:

  $$N_2 = \binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$$

  e quindi la probabilità di A_2 è:

  $$p(A_2) = \frac{N_2}{C} = \frac{120}{4060} = \frac{6}{203} \simeq 0{,}030.$$

Poiché A_1 e A_2 sono incompatibili, la somma dell'evento unione è dato dalla somma delle due probabilità:

$$p(A) = p(A_1 \cup A_2) = p(A_1) + p(A_2) = \frac{57}{203} + \frac{6}{203} = \frac{63}{203} = \frac{9}{29} \simeq 0{,}310.$$

- Probabilità dell'evento B.
  L'evento si realizza se una delle palline estratte è il 15 e le altre due palline hanno numerazione maggiore, cioè sono numerate da 16 a 30. Il numero dei casi favorevoli è dunque:

$$N_B = \binom{15}{2} = \frac{15 \cdot 14}{2 \cdot 1} = 105$$

  e la probabilità di B è:

$$p(B) = \frac{N_B}{C} = \frac{105}{4060} = \frac{3}{116} \simeq 0{,}026.$$

- Probabilità dell'evento C.
  L'evento C si verifica se e solo non è vero che le palline sono tutte bianche oppure tutte nere. Si tratta dell'evento contrario dell'evento A, quindi:

$$p(C) = p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{9}{29} = \frac{20}{29} \simeq 0{,}690.$$

3. La funzione è definita a tratti. Le due funzioni $y_1(x) = ax^2 + \frac{3}{2}$ e $y_2(x) = e^{b-x}$ che la costituiscono sono, rispettivamente, una funzione polinomiale e una funzione esponenziale, pertanto sono entrambe continue e derivabili su tutto $\mathbb{R}$ per ogni valore di a e b.
La funzione $f(x)$ è quindi derivabile in $\mathbb{R} - \{1\}$; imponiamo che sia continua e derivabile anche in $x = 1$.

Per la continuità:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1) \longrightarrow \lim_{x \to 1^-} \left(ax^2 + \frac{3}{2}\right) = e^{b-1} \longrightarrow a + \frac{3}{2} = e^{b-1}.$$

Per la derivabilità, osserviamo che $f(x)$ è derivabile in $\mathbb{R} - \{1\}$ e che

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax & \text{se } x < 1 \\ -e^{b-x} & \text{se } x > 1 \end{cases}.$$

Se $f(x)$ è continua in $x = 1$, per il criterio di derivabilità deve essere:

$$f'_-(1) = f'_+(1) \longrightarrow \lim_{x \to 1^-} 2ax = \lim_{x \to 1^+} -e^{b-x} \longrightarrow 2a = -e^{b-1}.$$

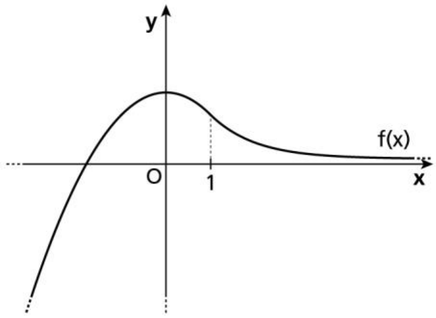
Mettiamo a sistema le due condizioni:

$$\begin{cases} a + \frac{3}{2} = e^{b-1} \\ 2a = -e^{b-1} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a + \frac{3}{2} = -2a \\ e^{b-1} = -2a \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ e^{b-1} = -2a \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ e^{b-1} = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = 1 \end{cases}.$$

La funzione cercata è quindi:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2} & \text{se } x < 1 \\ e^{1-x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}.$$

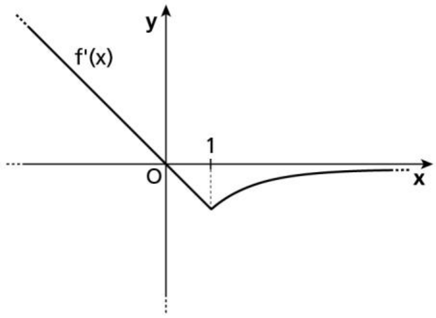
e il suo grafico si ottiene unendo un arco di parabola (per $x < 1$) e un arco di funzione esponenziale (per $x \geq 1$).



L'espressione analitica della derivata prima è

$$f'(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x < 1 \\ -e^{1-x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

e il suo grafico è costituito da una semiretta (per $x < 1$) e da un arco di funzione esponenziale (per $x \geq 1$).



Come si nota dal grafico la funzione $f'(x)$ è ovunque continua (abbiamo determinato i valori di a e b affinché lo fosse) ma non derivabile in $x = 1$, dove presenta un punto angoloso. Pertanto non esiste $f''(1)$. Questo si può rilevare anche per via analitica, infatti:

$$f''(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 1 \\ e^{1-x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

da cui:

$$f''_{-}(1) = \lim_{x \to 1^-} f''(x) = -1,$$

$$f''_{+}(1) = \lim_{x \to 1^+} f''(x) = 1;$$

poiché $f''_{-}(1) \neq f''_{+}(1)$, la funzione non ammette derivata seconda in $x = 1$.

4. Ricaviamo le intersezioni tra la superficie sferica Γ e la retta r_1:

$$(3t)^2 + 0^2 + (-3t+2)^2 - 2(3t) + 4 \cdot 0 - 4 = 0 \longrightarrow$$
$$\longrightarrow 9t^2 + 9t^2 + 4 - 12t - 6t - 4 = 0 \longrightarrow$$
$$\longrightarrow 18t^2 - 18t = 0 \longrightarrow t^2 - t = 0 \longrightarrow t_A = 0 \vee t_B = 1,$$

da cui $A(0; 0; 2)$ e $B(3; 0; -1)$.
Analogamente ricaviamo le intersezioni tra Γ e la retta r_2:

$$(3s+2)^2 + (-4)^2 + (-3s-2)^2 - 2(3s+2) + 4 \cdot (-4) - 4 = 0 \longrightarrow$$
$$\longrightarrow 9s^2 + 4 + 12s + 16 + 9s^2 + 4 + 12s - 6s - 4 - 16 - 4 = 0 \longrightarrow$$
$$\longrightarrow 18s^2 + 18s = 0 \longrightarrow s^2 + s = 0 \longrightarrow s_C = 0 \vee s_D = -1,$$

da cui $C(2; -4; -2)$ e $D(-1; -4; 1)$.
Ricaviamo l'equazione del piano α passante per i punti A, B, C e stabiliano se appartengono al piano anche il punto D e il centro della superficie sferica.
Imponiamo dunque che il piano di equazione generica $ax + by + cz + d = 0$ passi per i tre punti A, B e C:

$$\begin{cases} 2c + d = 0 \\ 3a - c + d = 0 \\ 2a - 4b - 2c + d = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} d = -2c \\ 3a - c - 2c = 0 \\ 2a - 4b - 2c - 2c = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} d = -2c \\ a = c \\ b = -\dfrac{c}{2} \end{cases}.$$

Possiamo scegliere il parametro c a piacere, purché diverso da 0; posto per esempio $c = 2$ troviamo che l'equazione del piano α è:

$$2x - y + 2z - 4 = 0.$$

Verifichiamo che il punto D appartiene al piano:

$$2 \cdot (-1) - (-4) + 2 \cdot 1 - 4 = 0 \longrightarrow -2 + 4 + 2 - 4 = 0 \longrightarrow 0 = 0.$$

Abbiamo ottenuto un'identità, quindi effettivamente D giace sul piano α.

Ricaviamo le coordinate del centro della superficie sferica. Poiché possiamo riscrivere l'equazione di Γ nella forma

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 9$$

deduciamo che il suo centro è il punto $O(1; -2; 0)$. Verifichiamo che anche il punto O appartiene al piano α:

$$2 \cdot 1 - (-2) + 2 \cdot 0 - 4 = 0 \longrightarrow 2 + 2 - 4 = 0 \longrightarrow 0 = 0.$$

5. Ricaviamo i valori di α e β imponendo il passaggio della curva di equazione $p = \frac{\alpha}{V+\beta}$ per i punti $A(2; 20)$ e $C(10; 12)$:

$$\begin{cases} 20 = \dfrac{\alpha}{2+\beta} \\ 12 = \dfrac{\alpha}{10+\beta} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 40 + 20\beta = \alpha \\ 120 + 12\beta = \alpha \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 40 + 20\beta = 120 + 12\beta \\ \alpha = 120 + 12\beta \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \beta = 10 \\ \alpha = 240 \end{cases}.$$

Per le unità di misura delle costanti α e β osserviamo quanto segue.

- La costante β ha le dimensioni fisiche di un volume, dato che nella formula indicata dal problema viene sommata al volume V; poiché, come evidenziato dalle unità di misura associate agli assi del grafico, si è scelto di misurare il volume in dm^3, anche la costante β sarà espressa in dm^3.
- La costante α ha le dimensioni fisiche di un prodotto tra pressione e volume, cioè di un lavoro, come osserviamo dall'equazione dimensionale:

  $$[p] = \frac{[\alpha]}{[V]} \longrightarrow [\alpha] = [p][V].$$

  Nel quesito proposto la pressione è misurata in kPa e il volume in dm^3, pertanto l'unità di misura in cui vengono espressi il lavoro e, di conseguenza, la costante α è:

  $$\mathrm{kPa} \cdot \mathrm{dm}^3 = 10^3\ \mathrm{Pa} \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^3 = \mathrm{Pa} \cdot \mathrm{m}^3 = \mathrm{J}.$$

Dal punto di vista grafico il lavoro associato a un ciclo del sistema corrisponde all'area della regione racchiusa dal ciclo stesso. Per via analitica, calcoliamo il lavoro compiuto dal sistema durante un ciclo mediante la somma algebrica di tre integrali, osservando che il lavoro è per convenzione positivo quando è *fatto dal* sistema (fase espansiva), mentre è negativo quando è *subito dal* sistema (fase compressiva):

$$W = \int_2^3 p_{AB}(V)dV + \int_3^{10} p_{BC}(V)dV - \int_2^{10} p_{AC}(V)dV.$$

Le tre funzioni $p_{AB}(V)$, $p_{BC}(V)$ e $p_{AC}(V)$, che descrivono l'andamento della pressione nei tre rami del ciclo, si ricavano in base alle indicazioni del quesito e del grafico, e sono:

$$p_{AB}(V) = 20V - 20, \qquad p_{BC}(V) = \frac{120}{V}, \qquad p_{AC}(V) = \frac{240}{V+10}.$$

Calcoliamo gli integrali:

$$\int_2^3 p_{AB}(V)dV = \int_2^3 (20V-20)dV = 20\left[\frac{V^2}{2} - V\right]_2^3 = 20\left(\frac{9}{2} - 3 - \frac{4}{2} + 2\right) = 30;$$

$$\int_3^{10} p_{BC}(V)dV = \int_3^{10} \frac{120}{V}dV = 120[\ln V]_3^{10} = 120\ln\frac{10}{3} \simeq 144{,}48;$$

$$\int_2^{10} p_{AC}(V)dV = \int_2^{10} \frac{240}{V+10}dV = 240[\ln(V+10)]_2^{10} = 240\ln\frac{20}{12} = 240\ln\frac{5}{3} \simeq 122{,}60.$$

Il lavoro risulta:

$$W \simeq 30 + 144{,}48 - 122{,}60 = 51{,}88 \simeq 52.$$

Per quanto riguarda l'unità di misura, tale lavoro è espresso in J come la costante α, visto che anche qui abbiamo moltiplicato una pressione (misurata in kPa) per un volume (misurato in dm^3). Quindi il lavoro compiuto dal sistema in un ciclo è:

$$W \simeq 52\ \mathrm{J}.$$

Il segno del lavoro è positivo, quindi prevale la fase espansiva del sistema.

Questo file è un'estensione dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Graziella Barozzi e Anna Trifone e dei corsi di fisica di Ugo Amaldi; John D Cutnell, Kenneth W Johnson; David Halliday, Robert Resnick, Jearl Walker; Claudio Romeni.
Hanno collaborato Andrea Betti, Lorenzo Meneghini, Steave Selvaduray e Pietro Velonà.

6. Primo metodo.

Per una risoluzione elementare scomponiamo la velocità iniziale nelle sue componenti orizzontale e verticale, uguali tra loro:

$$v_{0x} = v_{0y} = \frac{v_0}{\sqrt{2}} = \frac{1{,}53\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{\sqrt{2}} = 1{,}08\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

L'accelerazione a cui è soggetto lo ione è rivolta verso il basso e ha modulo:

$$a = \frac{F_{tot}}{m} = \frac{mg + \frac{e|\sigma|}{2\varepsilon_0}}{m} = g + \frac{e|\sigma|}{2\varepsilon_0 m} =$$

$$= 9{,}8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} + \frac{(1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C})(7{,}92 \cdot 10^{-17}\ \mathrm{C/m^2})}{2\left[8{,}854 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{C^2/(N \cdot m^2)}\right](1{,}79 \cdot 10^{-25}\ \mathrm{kg})} = 9{,}8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} + 4{,}00\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 13{,}8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Quindi la velocità verticale dello ione si annulla dopo un tempo:

$$\Delta t_1 = \frac{v_{0y}}{a} = \frac{1{,}08\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{13{,}8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 0{,}0783\ \mathrm{s}.$$

La distanza verticale di discesa percorsa in questo intervallo di tempo è:

$$\Delta y = v_{0y}\Delta t_1 - \frac{1}{2}a(\Delta t_1)^2 = \left(1{,}10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)(0{,}0783\ \mathrm{s}) - \frac{1}{2}\left(13{,}8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)(0{,}0783\ \mathrm{s})^2 = 0{,}0438\ \mathrm{m}.$$

Quindi il moto verticale dello ione parte da fermo da un'altezza:

$$y_2 = y_1 + \Delta y = 0{,}0320\ \mathrm{m} + 0{,}0438\ \mathrm{m} = 0{,}0758\ \mathrm{m}.$$

Di conseguenza lo ione colpisce la base dopo un ulteriore intervallo di tempo

$$\Delta t_2 = \sqrt{\frac{2y_2}{a}} = \sqrt{\frac{2(0{,}0758\ \mathrm{m})}{13{,}8\ \mathrm{m/s^2}}} = 0{,}105\ \mathrm{s},$$

al termine del quale la velocità verticale dello ione è:

$$v_y = -a\Delta t_2 = -\left(13{,}8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)(0{,}105\ \mathrm{s}) = -1{,}45\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Quindi il tempo totale di volo dello ione è:

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = (0{,}0783 + 0{,}105)\ \mathrm{s} = 0{,}183\ \mathrm{s}.$$

Inoltre, visto che la componente orizzontale della velocità si mantiene costante, il modulo della velocità finale dello ione risulta:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_{0x}^2 + v_y^2} = \sqrt{1{,}08^2 + 1{,}45^2}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 1{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Secondo metodo.

Introduciamo un sistema di riferimento y rivolto verso l'alto e con l'origine a livello della base della campana a vuoto. Utilizziamo le componenti della velocità iniziale e il valore dell'accelerazione calcolati in precedenza ($v_{0x} = v_{0y} = 1{,}08\ \mathrm{m/s}$; $a = 13{,}8\ \mathrm{m/s^2}$). Allo-

Questo file è un'estensione dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Graziella Barozzi e Anna Trifone e dei corsi di fisica di Ugo Amaldi; John D Cutnell, Kenneth W Johnson; David Halliday, Robert Resnick, Jearl Walker; Claudio Romeni.
Hanno collaborato Andrea Betti, Lorenzo Meneghini, Steave Selvaduray e Pietro Velonà.

ra la legge del moto per la posizione y è:

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}a\,t^2.$$

Ponendo $y = 0$, la soluzione accettabile (positiva) dell'equazione di secondo grado che ne risulta è:

$$t = \frac{v_{0y} + \sqrt{v_{0y}^2 + 2ay_0}}{a} = \frac{1{,}08\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + \sqrt{\left(1{,}08\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 + 2\left(13{,}8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)(0{,}0320\ \mathrm{m})}}{13{,}8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 0{,}182\ \mathrm{s}.$$

Il risultato ottenuto coincide con il precedente, entro la precisione delle cifre significative.

Il corrispondente valore della velocità finale è

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_{0x}^2 + v_y^2} = \sqrt{v_{0x}^2 + \left(v_{0y} - at\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(1{,}08\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 + \left[1{,}08\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - \left(13{,}8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)(0{,}182\ \mathrm{s})\right]^2} = 1{,}79\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

7. Per prima cosa è possibile calcolare l'irradiamento dell'onda elettromagnetica, che risulta:

$$E_R = \frac{\mathcal{E}}{A \cdot \Delta t} = \frac{1{,}97\ \mathrm{J}}{(3{,}16 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^2)(4{,}16\ \mathrm{s})} = 150\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}.$$

Il periodo T di un'onda elettromagnetica nell'infrarosso è dell'ordine delle decine di femtosecondi, per cui l'intervallo di tempo di 4,15 s considerato nell'esercizio è enorme rispetto a T. Quindi è giustificato il fatto di considerare i valori medi dell'onda elettromagnetica.

La densità volumica media di energia dell'onda elettromagnetica è:

$$\overline{w} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 = \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{2} c\varepsilon_0 E_0^2 = \frac{E_R}{c} = \frac{150\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}}{3{,}00 \cdot 10^8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 5{,}00 \cdot 10^{-7}\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3}.$$

Dal primo termine della formula precedente possiamo calcolare anche:

$$E_0 = \sqrt{\frac{2\overline{w}}{\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{2\left(5{,}00 \cdot 10^{-7}\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3}\right)}{8{,}854 \cdot 10^{-12}\ \frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2}}} = 336\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}.$$

Di conseguenza troviamo anche:

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{336\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}}{3{,}00 \cdot 10^8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 1{,}12 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{T}.$$

Questo file è un'estensione dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Graziella Barozzi e Anna Trifone e dei corsi di fisica di Ugo Amaldi; John D Cutnell, Kenneth W Johnson; David Halliday, Robert Resnick, Jearl Walker; Claudio Romeni.
Hanno collaborato Andrea Betti, Lorenzo Meneghini, Steave Selvaduray e Pietro Velonà.

8. Calcoliamo subito la lunghezza d'onda λ_1 del fotone incidente, che risulta:

$$\lambda_1 = \frac{c}{f_1} = \frac{2{,}998 \cdot 10^8 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{3{,}220 \cdot 10^{17} \ \mathrm{Hz}} = 9{,}311 \cdot 10^{-10} \ \mathrm{m}.$$

La relazione di Compton fornisce la variazione di lunghezza d'onda del fotone diffuso, che risulta:

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\alpha) = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34} \ \mathrm{J \cdot s}}{(9{,}109 \cdot 10^{-31} \ \mathrm{kg})\left(2{,}998 \cdot 10^8 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)}[1 - \cos(130{,}3°)] =$$
$$= 4{,}000 \cdot 10^{-12} \ \mathrm{m}.$$

Quindi la lunghezza d'onda del fotone diffuso è:

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda = (9{,}311 \cdot 10^{-10} + 4{,}000 \cdot 10^{-12}) \ \mathrm{m} = 9{,}351 \cdot 10^{-10} \ \mathrm{m}.$$

Di conseguenza la sua frequenza risulta:

$$f_2 = \frac{c}{\lambda_2} = \frac{2{,}998 \cdot 10^8 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{9{,}351 \cdot 10^{-10} \ \mathrm{m}} = 3{,}206 \cdot 10^{17} \ \mathrm{Hz}$$

e il corrispondente valore dell'energia è:

$$\mathcal{E}_2 = hf_2 = (6{,}626 \cdot 10^{-34} \ \mathrm{J \cdot s})(3{,}206 \cdot 10^{17} \ \mathrm{Hz}) = 2{,}124 \cdot 10^{-16} \ \mathrm{J}.$$

L'energia cinetica iniziale K dell'elettrone è uguale al modulo della variazione di energia del fotone. Quindi troviamo:

$$K = |\Delta\mathcal{E}| = h(f_1 - f_2) = (6{,}626 \cdot 10^{-34} \ \mathrm{J \cdot s})(3{,}220 \cdot 10^{17} \ \mathrm{Hz} - 3{,}206 \cdot 10^{17} \ \mathrm{Hz}) =$$
$$= 9{,}3 \cdot 10^{-19} \ \mathrm{J}.$$

Così la velocità iniziale v_e dell'elettrone diffuso risulta:

$$v_e = \sqrt{\frac{2K}{m_e}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}3 \cdot 10^{-19} \ \mathrm{J}}{9{,}109 \cdot 10^{-31} \ \mathrm{kg}}} = 1{,}4 \cdot 10^6 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$