ANNO SCOLASTICO 2012 - 13

SIMULAZIONE DELLA PROVA DI MATEMATICA DELL'ESAME DI STATO

INDIRIZZO: SCIENTIFICO CORSO DI ORDINAMENTO

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

Problema 1

Sono date la famiglia di funzioni

$$f(x) = ax^3 + x, \quad \text{con} \quad a \in \mathbf{R},$$

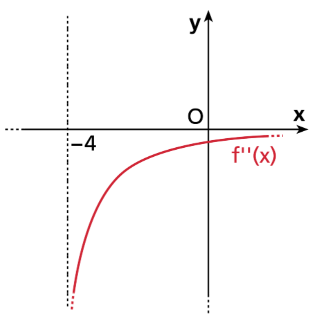
e la funzione

$$g(x) = x^4 - x^2.$$

a) Si dimostri che tutti i grafici delle funzioni f hanno in comune un unico punto e che tale punto è comune anche al grafico di g. Si eseguano poi lo studio di $f(x)$ al variare di a e lo studio di $g(x)$.
b) Si dimostri che l'equazione $ax^3 + x = x^4 - x^2$ ammette almeno due soluzioni qualunque sia il valore del parametro a.
c) Si determini per quale valore di a i grafici della funzione f e della funzione g ammettono la stessa tangente nel punto di ascissa -1. Si rappresentino i grafici delle due funzioni e la retta tangente comune.
d) Con riferimento al punto precedente, si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dai grafici delle due funzioni.
e) Si calcoli il volume del solido che ha come base la parte finita di piano appartenente al primo e al quarto quadrante delimitata dai grafici delle due funzioni, e le cui sezioni ottenute con piani perpendicolari all'asse x sono rettangoli di altezza $\frac{1}{x}$.

Problema 2

Nel riferimento cartesiano xOy si consideri la funzione $f(x)$ definita e continua in $]-4; +\infty[$, e con la derivata seconda $f''(x)$ avente il grafico riportato nella figura.



È noto che la retta di equazione $x = -4$ è un asintoto per $f(x)$ e che la tangente al grafico di $f(x)$ nel punto di ascissa $x = 0$ è parallela alla bisettrice del I e del III quadrante, mentre la tangente nel punto di ascissa –3 ha equazione $4x - y + 14 = 0$.

a) Si determini l'area della parte di piano delimitata dal grafico di $f''(x)$ e dall'asse x nell'intervallo $[-3; 0]$.
b) Si tracci un grafico probabile per $f'(x)$.
c) Sapendo che $f''(x) = -\dfrac{4}{(x+4)^2}$ e utilizzando tutte le informazioni già assegnate, si determini l'espressione analitica di $f(x)$ e, dopo averne completato lo studio, si rappresenti il suo grafico Γ.
d) Si calcoli l'area della parte di piano compresa tra Γ e l'asse x nell'intervallo $[-3; 0]$.
e) Si calcoli il volume del solido ottenuto dalla rotazione completa intorno alla retta di equazione $y = 2$ del tratto di Γ compreso nell'intervallo $[-3; 0]$.

Questionario

1. Dati due insiemi A e B, costituiti rispettivamente da 6 e da 5 elementi tutti distinti, si determini il numero di funzioni suriettive da A a B che è possibile definire.

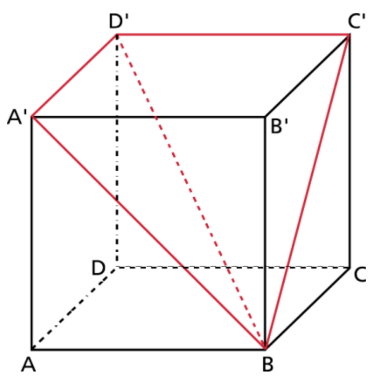
2. Si calcoli il seguente limite, applicando almeno due metodi: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x + \operatorname{sen} x}{1 - \cos x - \operatorname{sen} x}$.

3. La quantità q domandata, e venduta, di un bene di consumo in funzione del prezzo unitario p (in euro) è espressa dalla seguente relazione: $q = 500 - 25p$.
Se il prezzo unitario non supera € 15,00, per quale valore del prezzo il ricavo che si ottiene dalla vendita è massimo?
Si disegnino i grafici del ricavo in funzione del prezzo unitario e in funzione della quantità venduta.

4. Nel piano cartesiano xOy si consideri la parabola γ di equazione $y = kx^2$, con $k > 0$. Preso un punto P di ascissa positiva su γ, si considerino la tangente a γ in P, che interseca l'asse x in Q, e la parallela all'asse x passante per P, che interseca γ in un altro punto P'. Si determini il limite del rapporto fra l'area del segmento parabolico individuato dalla corda PP' e l'area del triangolo curvilineo individuato da PQ, QO e dall'arco OP, al tendere di P all'infinito.

5. È data una funzione $f(x)$, continua e derivabile con derivata puntualmente minore della funzione esponenziale $y = e^x$ (con e base del logaritmo naturale); si dimostri che: $f(1) - f(0) < e$.

6. Dato il cubo in figura, si determini l'ampiezza del diedro convesso che ha per spigolo BD' e per facce i piani $A'D'B$ e $C'D'B$.



7. Si consideri la seguente funzione definita a tratti: $f(x) = \begin{cases} x^2 + p^2 & \text{se} \quad x < 0 \\ p & \text{se} \quad 0 \le x < 2 \\ \dfrac{x+q}{x+1} & \text{se} \quad x \ge 2 \end{cases}$,

essendo p, q due costanti reali. Per quali coppie ordinate $(p; q)$ di valori delle costanti la funzione $f(x)$ è continua in $\mathbf{R}$?

8. Sia data la funzione: $g(x) = \int_x^{2x} f(t)dt$, con $f(t)$ continua su $\mathbf{R}$. Sapendo che $f(0) = -\frac{1}{2}$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ e $f(1) = 1$, si calcolino $g(0)$, $g'(0)$ e $g'\left(\frac{1}{2}\right)$.

9. È data la funzione: $f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x & \text{se} \quad x < 1 \\ \ln x & \text{se} \quad x \geq 1 \end{cases}$.

Si stabilisca, dando adeguata motivazione, il valore di verità della seguente proposizione:
"Poiché $\lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} f'(x) = 1$, la funzione è derivabile in $x = 1$ con derivata uguale a 1".

10. Il signor Pierluigi, appassionato di disegno tecnico, prendendo spunto dall'*Uomo vitruviano* di Leonardo rappresentato nella moneta da 1 euro, con qualche leggera modifica ottiene il disegno della figura, dove scopre che il rapporto tra il raggio del cerchio e il lato del quadrato è $\frac{5}{8}$.
Mediante le relazioni della trigonometria, si dimostri che ha ragione.