ANNO SCOLASTICO 2012 - 13

SIMULAZIONE DELLA PROVA DI MATEMATICA DELL'ESAME DI STATO

INDIRIZZO: SCIENTIFICO CORSO SPERIMENTALE

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

Problema 1

È data la famiglia di funzioni: $y = kx + (1-x)e^{2x}$, con $k \in \mathbf{R}$.

a) Si dimostri che i grafici delle funzioni della famiglia si incontrano tutti in uno stesso punto, che è anche l'unico punto di flesso di ogni funzione.
b) Si studi la presenza di asintoti, al variare di k, determinandone le equazioni e le eventuali intersezioni con il grafico della corrispondente funzione. Si trovi in particolare per quale valore di k l'equazione dell'asintoto è $y = -\frac{1}{2}x$.
c) Assegnato a k il valore trovato al punto precedente, si studi la funzione corrispondente e se ne rappresenti il grafico.
d) Si calcoli l'area della regione di piano del secondo quadrante delimitata dal grafico della funzione, dall'asintoto e dall'asse delle ordinate.
e) Si calcoli il volume del solido che ha come base la regione limitata di piano individuata dal grafico della funzione, dall'asintoto e dall'asse delle ordinate, e le cui sezioni ottenute con piani perpendicolari all'asse x sono esagoni regolari.

Problema 2

Una funzione $f(x)$ definita in $]1; +\infty[$ ha il grafico che interseca l'asse delle ascisse in $P(2; 0)$ ed è tale che la derivata prima $f'(x)$ è la funzione omografica $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ di centro $(1; 1)$ e passante per P.

a) Si determini l'equazione che esprime $f(x)$.
b) Si studi la funzione e si rappresenti il suo grafico γ.
c) Si dimostri che la retta r di equazione $y = e - 2$, con e base del logaritmo naturale, interseca γ in due punti A e B $(x_A < x_B)$ e si determini x_A, con una cifra decimale esatta, utilizzando uno dei metodi numerici studiati.
d) Si calcoli l'area della regione di piano compresa tra γ, l'asse delle ascisse e la retta di equazione $x = 1$.

Questionario

1. Nel piano cartesiano xOy si consideri la parabola γ di equazione $y = kx^2$, con $k > 0$. Preso un punto P di ascissa positiva su γ, si considerino la tangente a γ in P, che interseca l'asse x in Q, e la parallela all'asse x passante per P, che interseca γ in un altro punto P'. Si determini il limite del rapporto fra l'area del segmento parabolico individuato dalla corda PP' e l'area del triangolo curvilineo individuato da PQ, QO e dall'arco OP, al tendere di P all'infinito.

2. Data la funzione $y = \text{arcsen}(\text{sen}\,x)$, se ne determinino dominio, codominio, periodicità e si discuta la derivabilità. Si rappresenti poi il grafico della funzione.

3. Si determini il valore di $a \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right[$ per il quale la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{4}{\pi}\text{sen}(x-a) & \text{se } x \le a \\ \dfrac{4x^2}{\pi^2} - \dfrac{8x}{\pi} + 3 & \text{se } x > a \end{cases}$$

soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right]$.

4. Dati due insiemi A e B, costituiti rispettivamente da 6 e da 5 elementi tutti distinti, si determini il numero di funzioni suriettive da A a B che è possibile definire.

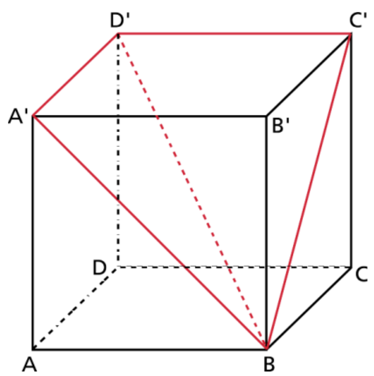
5. Considerato un particolare bersaglio per freccette a forma di semicerchio con disegnato all'interno il trapezio isoscele inscritto di area massima, si calcoli la probabilità che, lanciando a caso una freccetta che colpisce il bersaglio, la sua punta si conficchi nella parte del semicerchio esterna al trapezio.

6. Sia data la funzione: $g(x) = \int_x^{2x} f(t)\,dt$, con $f(t)$ continua su $\mathbf{R}$. Sapendo che $f(0) = -\frac{1}{2}$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ e $f(1) = 1$, si calcolino $g(0)$, $g'(0)$ e $g'\left(\frac{1}{2}\right)$.

7. Si determinino gli eventuali asintoti della funzione $f(x) = \ln(e^x - 1)$.

8. È data una funzione $f(x)$, continua e derivabile con derivata puntualmente minore della funzione esponenziale $y = e^x$ (con e base del logaritmo naturale); si dimostri che: $f(1) - f(0) < e$.

9. Dato il cubo in figura, si determini l'ampiezza del diedro convesso che ha per spigolo BD' e per facce i piani $A'D'B$ e $C'D'B$.



10. Si studino la continuità e la derivabilità della funzione definita dalla seguente legge:

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{|x|}{x} & \text{se } |x| > 1 \\ |x| & \text{se } |x| \le 1 \end{cases}.$$