ANNO SCOLASTICO 2010 - 11

SIMULAZIONE DELLA PROVA DI MATEMATICA DELL'ESAME DI STATO

INDIRIZZO: SCIENTIFICO CORSO SPERIMENTALE.

RISOLUZIONI

PROBLEMA 1

Il dominio della funzione

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}\ln x & \text{se} \quad x>0\\ a & \text{se} \quad x=0\end{cases}$$

è l'insieme $D=[0;+\infty[$.

La funzione è certamente continua per $x>0$, essendo il prodotto di due funzioni continue nel loro dominio naturale. L'unico punto in cui dobbiamo verificare la continuità è $x=0$.
La condizione di continuità (da destra) in tale punto è: $\lim_{x\to0^+}\sqrt{x}\ln x=a$.
Riscriviamo il limite e lo calcoliamo utilizzando la regola di De l'Hospital:

$$\lim_{x\to0^+}\sqrt{x}\ln x=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{2\sqrt{x^3}}}=\lim_{x\to0^+}-2\frac{\sqrt{x^3}}{x}=\lim_{x\to0^+}-2\sqrt{x}=0^-.$$

La continuità in tutto D impone pertanto $a=0$.

a) Riscriviamo la funzione:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}\ln x & \text{se} \quad x>0\\ 0 & \text{se} \quad x=0\end{cases}$$

e determiniamo la sua derivata:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x+\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}=\frac{\ln x+2}{2\sqrt{x}} \quad \text{per } x\neq0.$$

In $x=0$, applicando la definizione di derivata, abbiamo:

$$f_+'(0)=\lim_{h\to0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0^+}\frac{\sqrt{h}\ln h}{h}=\lim_{h\to0^+}\frac{\ln h}{\sqrt{h}}=-\infty;$$

pertanto l'insieme di derivabilità della funzione è $D'=]0;+\infty[$ e $x=0$ è un punto a tangente verticale.

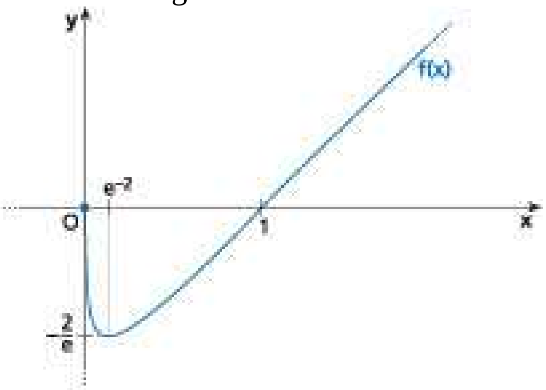
b) Per rappresentare il grafico Γ della funzione consideriamo i seguenti elementi.

- Dominio: $D=[0;+\infty[$, pertanto non possono esserci simmetrie nè rispetto all'asse y nè rispetto all'origine.
- Segno: $f(x)>0$ se $x>1$.
- Intersezioni con gli assi: (0; 0) e (1; 0).
- Limite all'infinito: $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\ln x=+\infty$ e non esiste l'asintoto obliquo poiché $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=0$.

- Derivata prima: $f'(x)=\frac{\ln x+2}{2\sqrt{x}}$.
  - $D'=]0;+\infty[$ e $x=0$ è un punto a tangente verticale.
  - $f(x)$ è crescente per $x>e^{-2}$, decrescente per $0<x<e^{-2}$. $x=e^{-2}$ è punto di minimo relativo e assoluto con $f(e^{-2})=-\frac{2}{e}$.
- Derivata seconda: $f''(x)=\frac{\frac{1}{x}\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}(\ln x+2)}{2x}=\frac{-\ln x}{4x\sqrt{x}}$.

$f(x)$ ha concavità rivolta verso l'alto per $0<x<1$, verso il basso per $x>1$; il punto $(1;0)$ è un flesso (con tangente obliqua).

Tracciamo il grafico.



c) L'area della regione finita di piano delimitata dal grafico della funzione e dall'asse delle ascisse è data dall' integrale: $A=-\int_0^1 f(x)dx.$

Sostituendo l'espressione analitica della funzione per $x\neq 0$, si ottiene un integrale (improprio) che può essere calcolato per parti:

$$A=-\int_0^1 \sqrt{x}\ln x dx=-\left\{\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln x\right]_0^1-\frac{2}{3}\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}\frac{1}{x}dx\right\}.$$

Dopo avere valutato la prima espressione considerando il limite per $x\to 0^+$ e calcolato il secondo integrale, si ha il risultato: $A=\frac{4}{9}$.

d) La parabola con asse coincidente con l'asse x e vertice nell'origine ha equazione: $x=ky^2$.

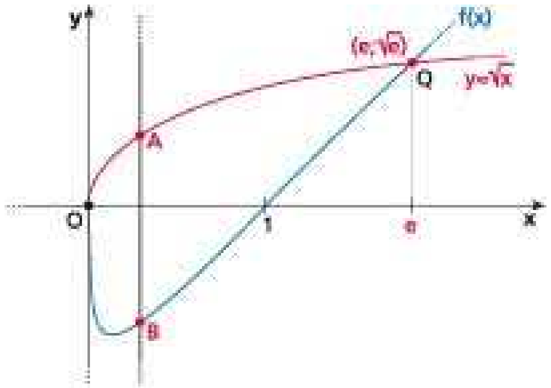
Il punto *Q* di Γ di ascissa e ha ordinata $y=\sqrt{e}$, quindi, sostituendo tali coordinate nell'equazione della parabola, otteniamo:

$$e=ke\to k=1.$$

La parabola *P* ha equazione $x=y^2$.

Esplicitando *y* otteniamo che l'arco di parabola richiesto ha equazione $y=\sqrt{x}$.

Rappresentiamo nel piano cartesiano la parabola *P* e la curva Γ, conduciamo una retta parallela all'asse delle ordinate e indichiamo con *A* e *B* i suoi punti di intersezione con la parabola e la curva Γ rispettivamente.



Le coordinate di *A* e *B* sono: $A(x;\sqrt{x})$ e $B(x;\sqrt{x}\ \ln x)$ con le limitazioni per x : $0 < x < e$.
Se $x = 0$, entrambi i punti *A* e *B* coincidono con l'origine del sistema di riferimento, mentre se $x = e$ coincidono con il punto *Q*.

La misura *g(x)* della corda *AB* è data da $y_A - y_B$ e cioè:

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{x}\ln x & \text{se } 0 < x \le e \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} .$$

La funzione *g(x)* è una funzione continua perché somma di funzioni continue nell'intervallo $[0;e]$ e pertanto per il teorema di Weierstrass ammette massimo e minimo assoluti nell'intervallo. Il minimo assoluto è *m*=0 ed è assunto negli estremi dell'intervallo; il massimo assoluto, invece, è assunto in un punto interno a $[0;e]$. Poiché la funzione è derivabile nell'intervallo, il punto di massimo assoluto è un punto stazionario.
Calcoliamo la derivata:

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}} \quad \rightarrow \quad g'(x) = \frac{-\ln x - 1}{2\sqrt{x}} .$$

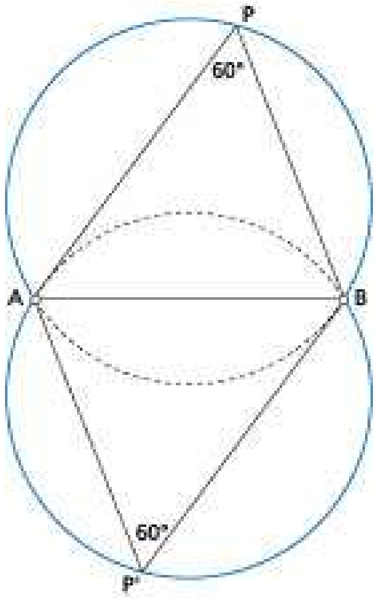
$g'(x)$ si annulla per $x = \frac{1}{e}$.

Dunque $x = \frac{1}{e}$ è il valore per cui la corda *AB* è massima.
Per tale valore otteniamo

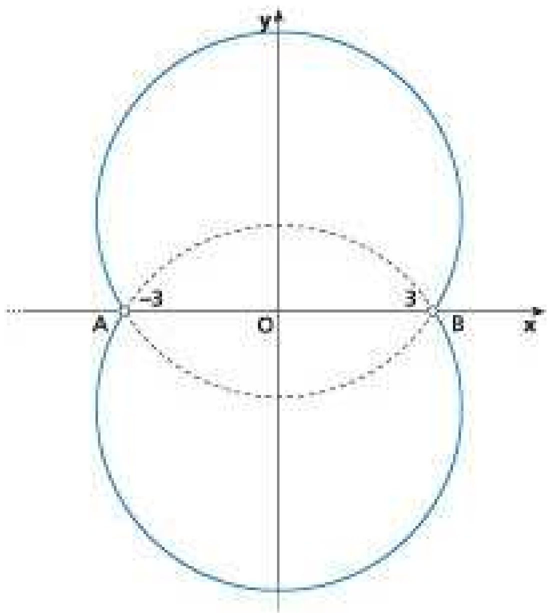
$$\overline{AB} = \sqrt{\frac{1}{e}} - \sqrt{\frac{1}{e}}\ln\frac{1}{e} = \frac{2}{\sqrt{e}} .$$

PROBLEMA 2

Disegniamo due punti *A* e *B* del piano; certamente i vertici dei due triangoli equilateri costruiti su *AB* da parte opposta rispetto alla retta *AB* appartengono al luogo richiesto.
Ricordando la proprietà che in una circonferenza gli angoli alla circonferenza che insistono su di uno stesso arco sono congruenti, si deduce che il luogo geometrico dei punti *P* del piano tali che l'angolo $A\hat{P}B$ sia di 60° è costituito dall'unione dei due archi maggiori di circonferenze circoscritte ai triangoli equilateri di lato *AB* prima costruiti, esclusi gli estremi dell'arco.



a) Disegniamo in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale *xOy* i punti *A* e *B* e costruiamo i due archi di circonferenza prima individuati.



Il raggio di tali archi è il raggio della circonferenza circoscritta ad un triangolo equilatero di lato 6.
Poiché, in un triangolo equilatero di lato l inscritto in una circonferenza di raggio r è $l = r\sqrt{3}$, otteniamo che il raggio è $2\sqrt{3}$.
Gli archi di circonferenza hanno centro nei circocentri dei triangoli equilateri di base *AB*; tali circocentri appartengono all'asse delle ordinate per la simmetria del problema.

Per determinare l'ordinata è sufficiente ricordare che in un triangolo equilatero il circocentro coincide con il baricentro e sfruttare le proprietà della mediana.
Nel semipiano *y>0* il centro è il punto $C(0;\sqrt{3})$ e il luogo è dato da

$$x^2+(y-\sqrt{3})^3=(2\sqrt{3})^2 \rightarrow x^2+y^2-2\sqrt{3}y-9=0$$

L'equazione dell'arco di circonferenza nel semipiano *y*<0 si ottiene mediante la sostituzione

$$y \rightarrow -y: \; x^2+y^2+2\sqrt{3}y-9=0$$, se *y*>0.

La forma sintetica dell'equazione del luogo è quella suggerita dal testo, ovvero:

$$L:\begin{cases} x^2+y^2-2\sqrt{3}\,|\,y\,|-9=0 \\ y\neq 0 \end{cases}.$$

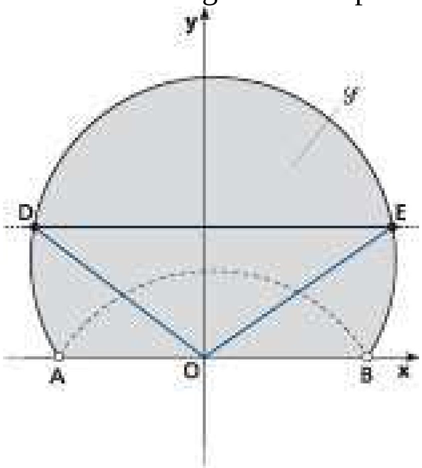
b) Il luogo *L* è invariante nelle simmetrie rispetto agli assi e all'origine.
Le equazioni delle trasformazioni geometriche piane a esse associate sono le seguenti:

$\sigma_x\begin{cases} x'=x \\ y'=-y \end{cases}$ per la simmetria rispetto all'asse delle ascisse;

$\sigma_y\begin{cases} x'=-x \\ y'=y \end{cases}$ per la simmetria rispetto all'asse delle ordinate;

$\sigma_O\begin{cases} x'=-x \\ y'=-y \end{cases}$ per la simmetria rispetto all'origine.

c) Conduciamo nel semipiano $y\geq 0$ una retta parallela all'asse delle ascisse di equazione *y*=*k* che intersechi il luogo *L* in due punti *D* ed *E*.



Comprendendo i casi degeneri, le limitazioni su *k* sono $0\leq k\leq 3\sqrt{3}$.
Le coordinate di *D* ed *E* sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2-2\sqrt{3}y-9=0 \\ y=k \end{cases}.$$

Si trova: $D\left(-\sqrt{9+2\sqrt{3}k-k^2};k\right)$ e $E\left(\sqrt{9+2\sqrt{3}k-k^2};k\right)$.
L'area del triangolo *DOE* è pertanto:

$$Area(DOE)=k\cdot\left(\sqrt{9+2\sqrt{3}k-k^2}\right)=f(k).$$

La funzione *f(k)* è continua nell'intervallo chiuso e limitato $0 \le k \le 3\sqrt{3}$, e si annulla negli estremi dell'intervallo. Per il Teorema di Weierstrass il massimo assoluto deve essere assunto in un punto interno all'intervallo.
Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(k) = \sqrt{9+2\sqrt{3}k-k^2} + k \cdot \frac{\sqrt{3}-k}{\sqrt{9+2\sqrt{3}k-k^2}} = \frac{9+2\sqrt{3}k-k^2+\sqrt{3}k-k^2}{\sqrt{9+2\sqrt{3}k-k^2}} = \frac{-2k^2+3\sqrt{3}k+9}{\sqrt{9+2\sqrt{3}k-k^2}}$$

$f'(k) \ge 0 \to 0 \le k \le \frac{3}{4}\left(\sqrt{3}+\sqrt{11}\right)$ nell'intervallo considerato.

La retta per cui l'area del triangolo è massima è pertanto $y = \frac{3}{4}\left(\sqrt{3}+\sqrt{11}\right)$.

L'area massima è $\frac{3\sqrt{2}}{16}\left(3+\sqrt{33}\right)\sqrt{\sqrt{33}+15}.$

d) La probabilità richiesta è il rapporto tra le aree del triangolo T di area massima e l'area della regione *S*.
L'area della regione *S* può essere calcolata mediante la somma dell'area S_1 di un settore circolare di raggio $2\sqrt{3}$ e angolo al centro $\alpha = 2\pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi$ e dell'area S_2 di un triangolo isoscele di lato uguale al raggio e angolo al vertice uguale a $\beta = \frac{2}{3}\pi$.

In definitiva: $S = S_1 + S_2 = \frac{1}{2}\alpha r^2 + \frac{1}{2}r^2 sen\beta = 6\left(\frac{4}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

La probabilità che, preso un punto in S, esso cada all'interno di T è pertanto:

$$\frac{\frac{3\sqrt{2}}{16}\left(3+\sqrt{33}\right)\sqrt{\sqrt{33}+15}}{6\left(\frac{4}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \approx 34{,}8\% .$$

QUESTIONARIO

1. Scriviamo la successione dei litri d'acqua versati nel recipiente allo scorrere del tempo *t*:

$$.\, l_1 = 1, \quad l_2 = \frac{1}{2}, \quad l_3 = \frac{1}{4}, \quad \dots \quad l_n = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Otteniamo cioè una progressione geometrica di ragione $q = \frac{1}{2}$ e primo termine $a_1 = 1$.

Calcoliamo la somma dei primi *n* termini con a formula $S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$:

$$S_n = 1\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\frac{1}{2^n}\right).$$

La quantità di acqua che si accumula nel recipiente allo scorrere del tempo tende a:

$$\lim_{n\to+\infty} 2\left(1-\frac{1}{2^n}\right) = 2,$$

valore che limita superiormente i termini della successione S_n, perché $2\left(1-\frac{1}{2^n}\right) < 2, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Quindi è sufficiente utilizzare un recipiente di capacità uguale a due litri, o di capacità maggiore.

2. Determiniamo la retta *t* richiesta imponendo che la retta tangente al grafico della funzione $y = \sqrt[3]{x-1}$ in un suo punto $P(x_o; \sqrt[3]{x_o - 1})$ passi per l'origine.

La derivata prima della funzione $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ è

$$f'(x) = \frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{(x-1)^2}};$$

l'equazione della retta tangente in $P(x_o; \sqrt[3]{x_o - 1})$ è pertanto:

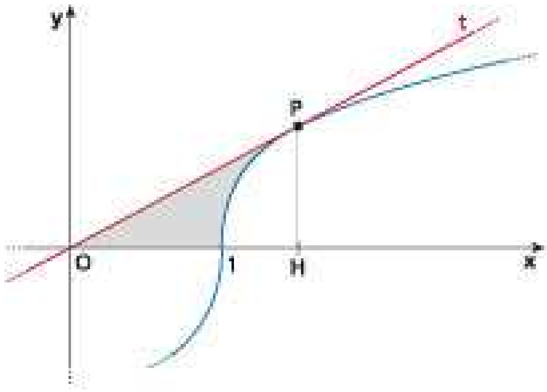
$$t:\ y - \sqrt[3]{x_o - 1} = \frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{(x_o-1)^2}}(x - x_0);$$

imponendo il passaggio per l'origine si ha:

$$-\sqrt[3]{x_o - 1} = \frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{(x_o-1)^2}}(-x_0) \to x_o - 1 = \frac{x_0}{3} \to x_o = \frac{3}{2}.$$

Il punto di tangenza è allora $P\left(\frac{3}{2}; \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)$.

Il volume *V* del solido ottenuto dalla rotazione completa attorno all'asse delle ascisse della regione di piano delimitata dalla retta *t*, dal grafico della funzione e dall'asse delle ascisse lo si ottiene sottraendo dal volume *V'* del cono di raggio *PH* e altezza *OH* il volume *V''* del solido ottenuto dalla rotazione dell'arco della curva $y = \sqrt[3]{x-1}$ compreso tra i punti (1; 0) e *H* attorno all'asse delle ascisse.



Si trova:

$$V' = \frac{1}{3}\pi \overline{PH}^2 \cdot \overline{OP} = \frac{1}{3}\pi\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)^2 \cdot \frac{3}{2} = \frac{\pi\sqrt[3]{2}}{4};$$

$$V'' = \pi\int_1^{3/2} f^2(x)dx = \pi\int_1^{3/2}\sqrt[3]{(x-1)^2}\,dx = \pi\left[\frac{3}{5}(x-1)^{\frac{5}{3}}\right]_1^{\frac{3}{2}} = \frac{3\pi\sqrt[3]{2}}{20}.$$

Il volume richiesto è:

$$V = V' - V'' = \frac{\pi\sqrt[3]{2}}{10}.$$

3. Determiniamo la probabilità che si ottenga il numero 13 in una estrazione.
Tale probabilità è il rapporto tra i casi favorevoli e il numero di casi possibili, ovvero:

$$p = \frac{C_{89,4}}{C_{90,5}} = \frac{\binom{89}{4}}{\binom{90}{5}} = \frac{\frac{89!}{4!\cdot 85!}}{\frac{90!}{5!\cdot 85!}} = \frac{89!\cdot 5!}{4!\cdot 90!} = \frac{1}{18}.$$

La probabilità che non si ottenga il numero13 in una estrazione è la probabilità dell'evento contrario:

$$q = 1 - p = \frac{17}{18}.$$

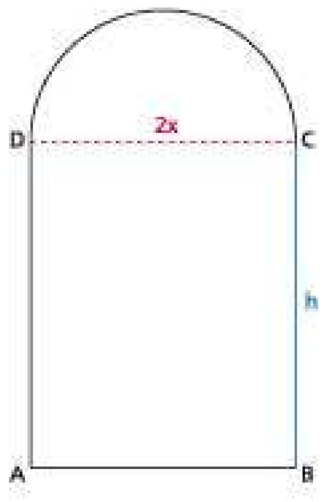
La probabilità che non si ottenga mai il numero13 in *n* estrazioni è pertanto q^n, essendo ogni estrazione indipendente dalle precedenti e dalle successive (caso delle prove ripetute).

Se utilizziamo ancora la probabilità dell'evento contrario, abbiamo che la probabilità cercata è:

$$f(n) = 1 - q^n = 1 - \left(\frac{17}{18}\right)^n.$$

Il limite di tale funzione per $n \to +\infty$ è pertanto $\lim_{n\to+\infty} f(n) = 1$, ovvero la probabilità dell'evento certo.
Il risultato ottenuto significa che "prima o poi" certamente il numero 13 esce in una estrazione dei numeri del Lotto. Non è possibile tuttavia stabilire quando ciò avviene!!

4. Indichiamo con 2*x* la base del rettangolo e con *h* la sua altezza.



Il perimetro della figura corrisponde alla lughezza totale del profilo.

Perimetro (ABCD)= lunghezza profilo

Dunque $2x + 2h + \pi x = 4$;

da cui, esprimendo *h* in funzione di *x* si ha:

$$h = 2 - x - \frac{\pi}{2} x.$$

Le condizioni sulla incognita *x* sono $0 < x < \frac{4}{2+\pi}$, avendo escluso i casi limite corrispondenti a segmenti rispettivamente verticale ed orizzontale.

La funzione obiettivo è rappresentata dall'area della figura, che corrisponde alla somma dell'area di un rettangolo di base *2x* e altezza *h* e di un semicerchio di raggio *x*:

$$S = h \cdot 2x + \frac{\pi}{2} x^2.$$

Sostituiamo il valore di h espresso in funzione dell'incognita e otteniamo:

$$S(x) = -\left(2 + \frac{\pi}{2}\right) x^2 + 4x.$$

Tale funzione è rappresentata da una parabola con concavità verso il basso; il valore massimo è pertanto assunto nel vertice:

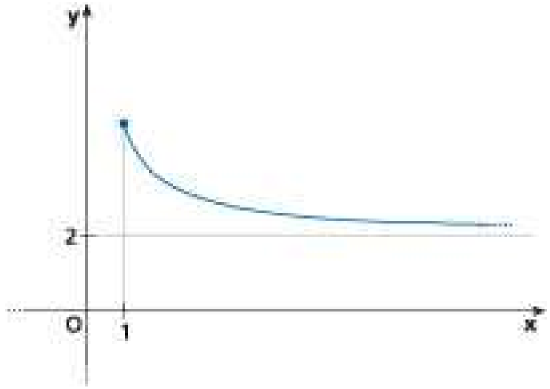
$$x_{\max} = \frac{4}{4+\pi}.$$

Sostituendo nella espressione per *h* si trova : $h_{\max} = \frac{4}{4+\pi}$.

La finestra mistilinea di massima superficie realizzabile con un profilo lungo in totale 4 metri è costituita da un rettangolo di altezza $h_{\max} = \frac{4}{4+\pi} \approx 56cm$, sormontata da una circonferenza di raggio di base pari all'altezza del rettangolo.

5. Per determinare la equazione della traiettoria è sufficiente eliminare il tempo dalle due equazioni.

Dalla prima equazione ricaviamo $t = \ln x, \quad x \geq 1$ e sostituendo nell'equazione in *y* troviamo l'equazione della traiettoria: $y = \frac{3}{x} + 2 \quad , \quad x \geq 1$.



Le componenti cartesiane del vettore velocità possono essere determinate calcolando la derivata delle coordinate spaziali rispetto al tempo. Nel caso in esame abbiamo:

$$\begin{cases} v_x = e^t \\ v_y = -3e^{-t} \end{cases} .$$

Il modulo della velocità è pertanto: $v(t) = \sqrt{e^{2t} + 9e^{-2t}}$, la cui derivata è:

$$v' = \frac{e^{2t} - 9e^{-2t}}{\sqrt{e^{2t} + 9e^{-2t}}} = \frac{e^{4t} - 9}{e^{2t} \cdot \sqrt{e^{2t} + 9e^{-2t}}} .$$

E' $v' > 0$ per $t > \ln\sqrt{3}$.

La velocità minima è pertanto $v(\ln\sqrt{3}) = \sqrt{6}\,\frac{m}{s}$.

6. Il numero di Nepero *e* è definito dal seguente limite: $e = \lim_{n \to +\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ e il logaritmo naturale di un numero reale *a* positivo, $\ln a$ è l'esponente che deve essere dato a *e* per ottenere il numero *a*:

$$e^{\ln a} = a.$$

Posto $f(x) = \frac{1}{x}$, abbiamo: $\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$.

Possiamo calcolare un valore approssimato di *ln*2 calcolando numericamente l'integrale, per esempio con il metodo dei trapezi.

Dividiamo l'intervallo $[1;2]$ in n=4 intervalli di ampiezza h=1/4 e costruiamo la seguente tabella:

n	0	1	2	3	4
x_n	1	5/4	3/2	7/4	2
$f(x) = \frac{1}{x}$	1	4/5	2/3	4/7	1/2

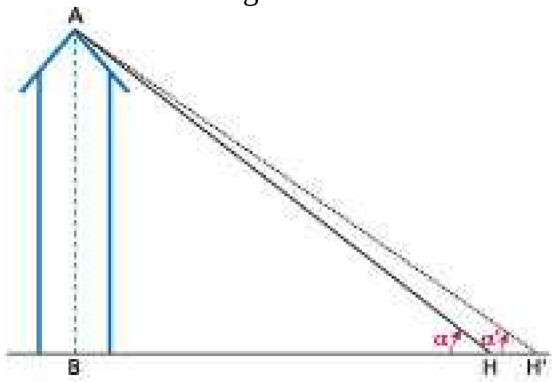
Applicando la formula dei trapezi alla funzione data nell'intervallo $[a;b] = [1;2]$, otteniamo:

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx \approx h\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)\right]=\frac{1}{4}\left[\frac{1+\frac{1}{2}}{2}+\frac{4}{5}+\frac{2}{3}+\frac{4}{7}\right]=\frac{1171}{1680}\approx 0{,}69702....$$

L'errore commesso è minore o uguale della quantità $\varepsilon_n = \frac{(b-a)^3}{12n^2}\cdot M$, dove M è il massimo del modulo della derivata seconda della funzione *f* nell'intervallo $[1;2]$.

Poiché, la derivata seconda della funzione in esame è $f''(x)=\frac{2}{x^3} \rightarrow M=2,$ l'errore commesso è quindi maggiorato da $\varepsilon_4 = \frac{(2-1)^3}{12\cdot 4^2}\cdot 2=\frac{1}{96}\approx 0{,}01$. Pertanto risulta $\ln 2 = 0{,}7$.

7. Consideriamo la figura.



Applicando i teoremi sui triangoli rettangoli al triangolo *ABH* si ha:

$$tg\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{BH}} \rightarrow \alpha = arctg\,\frac{\overline{AB}}{\overline{BH}}$$

Se l'ombra del campanile è lunga il doppio rispetto alla sua altezza, allora $\overline{BH}=2\overline{AB}$, e quindi $\alpha = arctg\,\frac{1}{2}$. Utilizzando una calcolatrice, troviamo $\alpha \approx 26°33'54''$.

Se l'ombra del campanile aumenta del 10%, allora:

$$\overline{HH'}=0{,}1\overline{BH} \rightarrow \overline{BH'}=1{,}1\overline{BH}=2{,}2\overline{AB}.$$

Procedendo in modo analogo al caso precedente, si trova:

$$\alpha' = arctg\,\frac{\overline{AB}}{\overline{BH'}} = arctg\,\frac{1}{2{,}2} = arctg\,0{,}\overline{45} \approx 24°26'38''.$$

La variazione dell'inclinazione dei raggi del Sole è pertanto pari a $\alpha'-\alpha \approx -2°7'16''$.

8. La funzione integranda $f(t)=\frac{t}{\ln(1+t)}$ è definita e continua per $t>-1 \wedge t\neq 0$, poiché in *t=0* si annulla il denominatore. La funzione integrale, avendo come primo estremo *x*=1, deve contenere tale valore nel suo insieme di definizione; il più ampio insieme in cui può essere definita è pertanto l'intervallo $]0;+\infty[$. La funzione è integrabile in senso generalizzato in x=0, e quindi la funzione integrale potrebbe essere definita in $]-1;+\infty[$.

La derivata della funzione data è $F'(x)=\dfrac{x}{\ln(1+x)}$. Il segno della derivata prima è positivo in $]0;+\infty[$: la funzione è pertanto monotona strettamente crescente e quindi è invertibile.

Poiché vale il teorema:

$$G'(y)=\frac{1}{F'(G(y))}, \text{ se } F'(G(y))\neq 0,$$

essendo $F(1)=0$ e $F'(1)=\dfrac{1}{\ln 2}\neq 0$, troviamo che $G'(0)=\dfrac{1}{F'(1)}=\ln 2.$

9. Il problema posto equivale a stabilire il rapporto tra le superfici di un cubo e di un cilindro equilatero equivalenti. Sia l il lato del cubo e r il raggio di base del cilindro equilatero (l'altezza del cilindro è pertanto $2r$).

Uguagliando i volumi troviamo la condizione $l^3=2\pi r^3 \rightarrow l=\sqrt[3]{2\pi}\,r$.

Determiniamo, quindi, il rapporto tra la superficie del cubo e quella del cilindro:

$$\frac{S(cubo)}{S(cilindro)}=\frac{6l^2}{2\pi r^2+2\pi r 2r}=\frac{l^2}{\pi r^2}=\frac{\sqrt[3]{(2\pi)^2}}{\pi}=\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}>1\cdot$$

Poiché la superficie del cubo è maggiore rispetto alla superficie totale del cilindro equilatero, a parità di volume e supponendo che non vi siano sprechi nella lavorazione, è più conveniente realizzare un contenitore a forma di cilindro equilatero.

10. Osserviamo che, essendo il primo membro non negativo, l'equazione è impossibile $\forall k<0$.

Se k=0, per la legge di annullamento del prodotto, l'equazione $e^{x+1}x^2|x+2|=0$ ha due soluzioni distinte, x=-2 e x=0, la seconda delle quali con molteplicità 2.

Per $k>0$, si può stabilire graficamente il numero di soluzioni della equazione proposta considerando il numero di intersezioni tra la curva $f(x)=e^{x+1}x^2|x+2|$ e il fascio di rette y=k, ovvero le soluzioni del sistema parametrico:

$$\begin{cases} y=k \\ y=e^{x+1}x^2|x+2| \end{cases}$$

Rappresentiamo la funzione trascendente, dopo averne studiato gli elementi fondamentali.

- Dominio : D = $\mathbf{R}$.
- Segno: $f(x)\geq 0\ \forall x$.
- Intersezioni con gli assi nei punti (-2;0) e (0;0).
- Limiti agli estremi del dominio:
  - $\lim_{x\to-\infty} e^{x+1}x^2|x+2|=0^+ \rightarrow$ la retta y=0 è asintoto orizzontale sinistro;

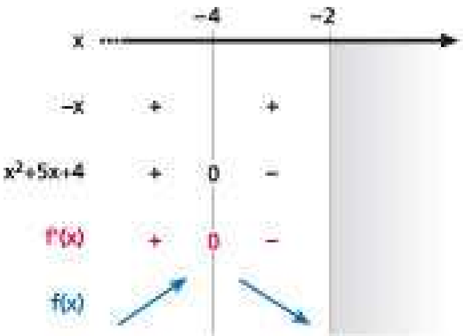
- $\lim_{x\to+\infty} e^{x+1}x^2|x+2| = +\infty$ e non esistono asintoti obliqui, poiché l'ordine di infinito è maggiore rispetto a *x*.

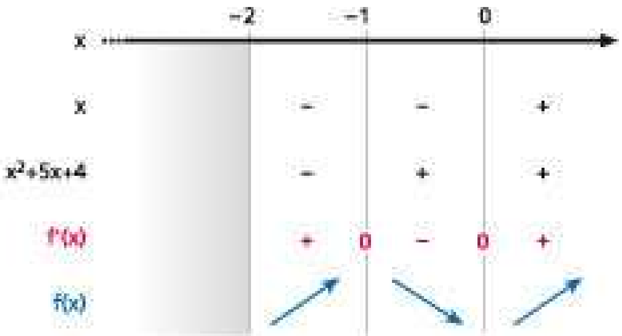
- Derivata prima: $f'(x) = \begin{cases} e^{x+1}x(x^2+5x+4) & se \quad x>-2 \\ -e^{x+1}x(x^2+5x+4) & se \quad x<-2 \end{cases}$.

  Quindi: $D' = D - \{-2\}$ e la funzione presenta un punto angoloso in *x*=-2.

  Segno della derivata prima: il fattore $x^2+5x+4>0$ per $x<-4 \vee x>-1$.

Rappresentiamo separatamente i due casi $x<-2$ e $x>-2$.



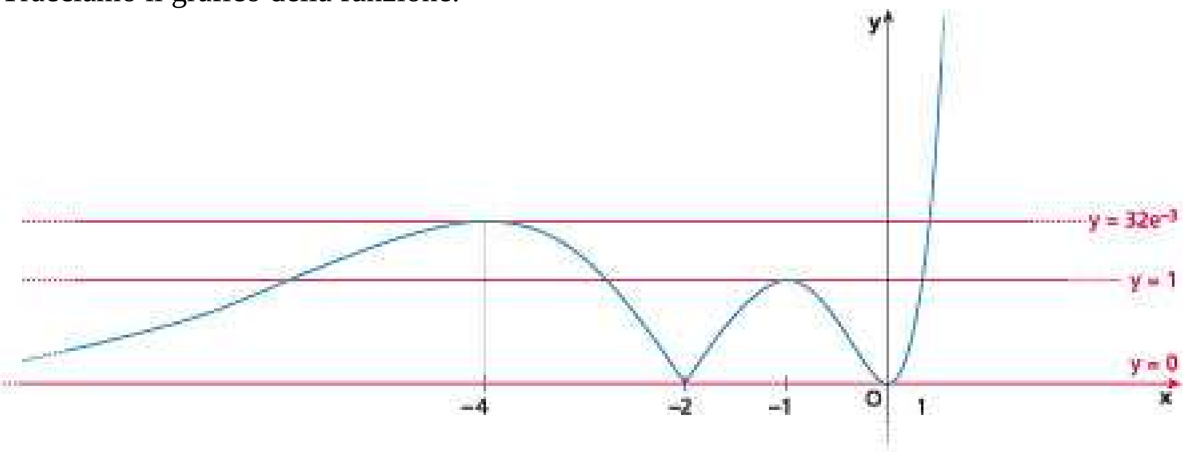


La funzione è crescente per $x<-4 \vee -2<x<-1 \vee x>0$:

x=-4 e *x=-1* sono punti di massimo relativo con $f(-4)=32e^{-3}$ e $f(-1)=1$;

x=-2 e *x=0* sono punti di minimo assoluto con $f(-2)=0$ e $f(0)=0$.

Tracciamo il grafico della funzione.



Per via grafica troviamo che il sistema ammette:

- per $k<0$, nessuna soluzione;
- per $k=0$, due soluzioni distinte, di cui una doppia;
- per $0<k<1$, cinque soluzioni;
- per *k=1* , quattro soluzioni, di cui una doppia;
- per $1<k<32e^{-3}$, tre soluzioni;
- per $k=32e^{-3}$, due soluzioni, di cui una doppia;
- per $k>32e^{-3}$, una soluzione.