ANNO SCOLASTICO 2010 - 11

SIMULAZIONE DELLA PROVA DI MATEMATICA DELL'ESAME DI STATO

INDIRIZZO: SCIENTIFICO   CORSO SPERIMENTALE.

Il candidato risolva uno dei problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

In un sistema di riferimento cartesiano *xOy*, si consideri la funzione

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}\ln x & \text{se} \quad x>0\\ a & \text{se} \quad x=0\end{cases}$$

e si determini il valore del parametro reale a in modo tale che la funzione sia continua nel suo dominio.
Per il valore di a così ottenuto:

a) si stabilisca l'insieme di derivabilità della funzione;
b) si studi e si rappresenti il grafico Γ della funzione;
c) si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dal grafico della funzione e dall'asse delle ascisse;
d) si determini l'equazione dell'arco di parabola P con asse coincidente con l'asse x, vertice nell'origine e passante per il punto di Γ di ascissa $x=e$;
e) nella regione finita di piano compresa tra la parabola P e la curva Γ si conduca una retta parallela all'asse delle ordinate e si determini la misura $g(x)$ della corda intercettata da tale retta sulle due curve. Si stabilisca se $g(x)$ presenta un massimo.

PROBLEMA 2

Dati due punti distinti del piano A e B, si illustri come è possibile costruire il luogo geometrico dei punti P del piano tali che l'angolo $A\hat{P}B$ sia di 60°.
Si consideri poi un sistema di assi cartesiani ortogonali *xOy* in modo tale che le coordinate di A e B siano rispettivamente $A(-3;0)$ e $B(3;0)$.

a) Si verifichi che l'equazione cartesiana del luogo L richiesto è

$$L:\begin{cases}x^2+y^2-2\sqrt{3}\,|y|-9=0\\ y\neq 0\end{cases}.$$

b) Si individuino le simmetrie rispetto alle quali il luogo L è invariante e si scrivano le equazioni delle trasformazioni geometriche piane ad esse associate.
c) Nel semipiano $y\geq 0$, si consideri la regione S finita di piano delimitata dal luogo L e dall'asse delle ascisse. Si conduca una retta parallela all'asse delle ascisse che intersechi il luogo L in due punti D e E, appartenenti alla regione S, in modo tale che l'area del triangolo di vertici DOE sia massima.
d) Detto T il triangolo di area massima, si determini la probabilità che preso un punto del piano nella regione S, tale punto cada all'interno di tale triangolo.

QUESTIONARIO

1. Un recipiente vuoto riceve un litro d'acqua il primo minuto. Il secondo minuto ne riceve la metà, il terzo minuto la metà della metà e così via senza mai interrompere il versamento. Quale deve essere la capacità del recipiente affinché l'acqua non tracimi? Rispondere motivando adeguatamente la risposta.

2. Condurre dall'origine la retta *t* tangente al grafico della funzione $y=\sqrt[3]{x-1}$ e calcolare il volume del solido ottenuto dalla rotazione completa attorno all'asse delle ascisse della regione di piano delimitata dalla retta *t*, dal grafico della funzione e dall'asse delle ascisse. .

3. Si estrae una cinquina del Lotto *n* volte. Determinare in funzione di *n* la probabilità che si ottenga almeno una volta 13. Calcolare il limite di tale funzione per $n \to +\infty$ e interpretare il risultato ottenuto.

4. In una parete deve essere ricavata una finestra mistilinea a forma rettangolare con una semicirconferenza al posto della base superiore. Determinare quali devono essere le dimensioni della finestra di massima superficie realizzabili con un profilo lungo 4 metri.

5. Un punto materiale si muove nel piano e le sue coordinate, espresse in metri, sono date dalle relazioni $\begin{cases} x = e^t \\ y = 3e^{-t} + 2 \end{cases}$, dove *t* è il tempo in secondi. Determinare l'equazione della traiettoria e il valore minimo del modulo della velocità.

6. Dare la definizione di numero di Nepero e di logaritmo naturale. Illustrare un metodo numerico per la determinazione di *ln*2.

7. Qual è l'inclinazione dei raggi del Sole quando l'ombra di un campanile è lunga il doppio della sua altezza? Determinare la variazione dell'inclinazione in gradi, primi e secondi per cui, rispetto alla situazione precedente, l'ombra del campanile aumenta del 10%.

8. Si consideri la funzione $F(x)=\int_1^x \frac{t}{\ln(1+t)}dt$ e si dimostri che è invertibile nell'intervallo $]0;+\infty[$. Detta *G*(*y*) la funzione inversa, si calcoli *G'*(0).

9. Si vuole realizzare un contenitore della capacità di 4 litri impiegando la minima quantità di materiale. Supponendo che non vi siano sprechi nella lavorazione, è più conveniente realizzare il contenitore a forma di cubo o di cilindro equilatero? Motivare la risposta.

10. Stabilire il numero di soluzioni dell'equazione $e^{x+1}x^2\left|x+2\right| = k$ al variare del parametro reale *k*.