

<p style="text-align: center;">ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO CORSO DI ORDINAMENTO 2012</p>
--

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario¹.

PROBLEMA 1

Siano f e g le funzioni definite, per tutti gli x reali, da

$$f(x) = |27x^3| \text{ e } g(x) = \text{sen} \left(\frac{3}{2}\pi x \right).$$

1. Qual è il periodo della funzione g ? Si studino f e g e se ne disegnino i rispettivi grafici G_f e G_g in un conveniente sistema di riferimento cartesiano Oxy .
2. Si scrivano le equazioni delle rette r e s tangenti, rispettivamente, a G_f e a G_g nel punto di ascissa $x = \frac{1}{3}$. Qual è l'ampiezza, in gradi e primi sessagesimali, dell'angolo acuto formato da r e da s ?
3. Sia R la regione delimitata da G_f e da G_g . Si calcoli l'area di R .
4. La regione R , ruotando intorno all'asse x , genera il solido S e, ruotando intorno all'asse y , il solido T . Si scrivano, spiegandone il perché, ma senza calcolarli, gli integrali definiti che forniscono i volumi di S e di T .

PROBLEMA 2

Nel primo quadrante del sistema di riferimento Oxy sono assegnati l'arco di circonferenza di centro O e estremi $A(3, 0)$ e $B(0, 3)$ e l'arco L della parabola d'equazione $x^2 = 9 - 6y$ i cui estremi sono il punto A e il punto $(0, 3/2)$.

1. Sia r la retta tangente in A a L . Si calcoli l'area di ciascuna delle due parti in cui r divide la regione R racchiusa tra L e l'arco AB .

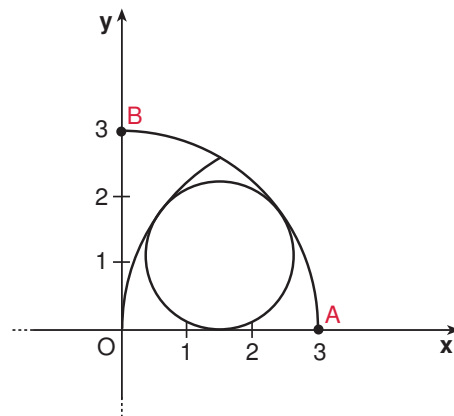
¹Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

- La regione R è la base di un solido W le cui sezioni, ottenute tagliando W con piani perpendicolari all'asse x , hanno, per ogni $0 \leq x \leq 3$, area $S(x) = e^{5-3x}$. Si determini il volume di W .
- Si calcoli il volume del solido ottenuto dalla rotazione di R intorno all'asse x .

- Si provi che l'arco L è il luogo geometrico descritto dai centri delle circonferenze tangenti internamente all'arco AB e all'asse x . Infine, tra le circonferenze di cui L è il luogo dei centri si determini quella che risulta tangente anche all'arco di circonferenza di centro A e raggio 3, come nella figura a lato.



QUESTIONARIO

- Cosa rappresenta il limite seguente e qual è il suo valore?

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{5 \left(\frac{1}{2} + h \right)^4 - 5 \left(\frac{1}{2} \right)^4}{h}$$

- Si illustri il significato di *asintoto* e si fornisca un esempio di funzione $f(x)$ il cui grafico presenti un asintoto orizzontale e due asintoti verticali.
- La posizione di una particella è data da $s(t) = 20 \left(2e^{-\frac{t}{2}} + t - 2 \right)$. Qual è la sua accelerazione al tempo $t = 4$?
- Qual è la capacità massima, in litri, di un cono di apotema 1 metro?
- Siano dati nello spazio n punti $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$. Quanti sono i segmenti che li congiungono a due a due? Quanti i triangoli che hanno per vertici questi punti (supposto che nessuna terna sia allineata)? Quanti i tetraedri (supposto che nessuna quaterna sia complanare)?
- Sia $f(x) = 5 \sin x \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x - \frac{5}{2} \sin 2x - \cos 2x - 17$; si calcoli $f'(x)$.

7. E' dato un tetraedro regolare di spigolo l e altezza h . Si determini l'ampiezza dell'angolo α formato da l e da h .
8. Qual è il valor medio di $f(x) = \frac{1}{x}$ da $x = 1$ a $x = e$?
9. Il problema di Erone (matematico alessandrino vissuto probabilmente nella seconda metà del I secolo d.C.) consiste, assegnati nel piano due punti A e B , situati dalla stessa parte rispetto ad una retta r , nel determinare il cammino minimo che congiunge A con B toccando r . Si risolva il problema nel modo che si preferisce.
10. Quale delle seguenti funzioni è positiva per ogni x reale?
- A) $\cos(\sin(x^2 + 1))$ B) $\sin(\cos(x^2 + 1))$ C) $\sin(\ln(x^2 + 1))$ D) $\cos(\ln(x^2 + 1))$.

Si giustifichi la risposta.