

**ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2011**

Il candidato risolve uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

■ **PROBLEMA 1**

Sia f la funzione definita sull'insieme \mathbb{R} dei numeri reali da $f(x) = x + \ln 4 + \frac{2}{e^x + 1}$ e sia Γ la sua rappresentazione grafica nel sistema di riferimento Oxy .

1. Si determini il limite di $f(x)$ per x che tende a $+\infty$ e a $-\infty$. Si calcoli $f(x) + f(-x)$ e si spieghi perche dal risultato si pu dedurre che il punto $A(0, 1 + \ln 4)$ e centro di simmetria di Γ .
2. Si provi che, per tutti i reali m , l'equazione $f(x) = m$ ammette una e una sola soluzione in \mathbb{R} . Sia α la soluzione dell'equazione $f(x) = 3$; per quale valore di m il numero $-\alpha$ e soluzione dell'equazione $f(x) = m$?
3. Si provi che, per tutti gli x reali, $f(x) = x + 2 + \ln 4 - \frac{2e^x}{e^x + 1}$. Si provi altres che la retta r di equazione $y = x + \ln 4$ e la retta s di equazione $y = x + 2 + \ln 4$ sono asintoti di Γ e che Γ e interamente compresa nella striscia piana delimitata da r e da s .
4. Posto $I(\beta) = \int_0^\beta [f(x) - x - \ln 4] dx$, si calcoli: $\lim_{\beta \rightarrow +\infty} I(\beta)$. Qual e il significato geometrico del risultato ottenuto?

■ **PROBLEMA 2**

Per il progetto di una piscina, un architetto si ispira alle funzioni f e g definite, per tutti gli x reali, da:

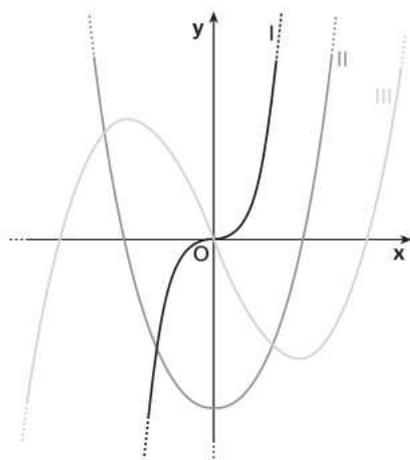
$$f(x) = x^3 - 16x \quad \text{e} \quad g(x) = \sin \frac{\pi}{2} x.$$

1. Si studino le funzioni f e g e se ne disegnano i rispettivi grafici in un conveniente sistema di riferimento cartesiano Oxy . Si considerino i punti del grafico di g a tangente orizzontale la cui ascissa e compresa nell'intervallo $[-10; 10]$ e se ne indichino le coordinate.
2. L'architetto rappresenta la superficie libera dell'acqua nella piscina con la regione R delimitata dai grafici di f e di g sull'intervallo $[0; 4]$. Si calcoli l'area di R .
3. Ai bordi della piscina, nei punti di intersezione del contorno di R con le rette $y = -15$ e $y = -5$, l'architetto progetta di collocare dei fari per illuminare la superficie dell'acqua. Si calcolino le ascisse di tali punti (e sufficiente un'approssimazione a meno di 10^{-1}).
4. In ogni punto di R a distanza x dall'asse y , la misura della profondita dell'acqua nella piscina e data da $h(x) = 5 - x$. Quale sar il volume d'acqua nella piscina? Quanti litri d'acqua saranno necessari per riempire la piscina se tutte le misure sono espresse in metri?

■ **QUESTIONARIO**

- 1 Silvia, che ha frequentato un indirizzo sperimentale di liceo scientifico, sta dicendo a una sua amica che la geometria euclidea non e pi vera perch per descrivere la realta del mondo che ci circonda occorrono modelli di geometria non euclidea. Silvia ha ragione? Si motivi la risposta.
- 2 Si trovi il punto della curva $y = \sqrt{x}$ pi vicino al punto di coordinate $(4; 0)$.

- 3** Sia R la regione delimitata, per $x \in [0; \pi]$, dalla curva $y = \sin x$ e dall'asse x e sia W il solido ottenuto dalla rotazione di R attorno all'asse y . Si calcoli il volume di W .
- 4** Il numero delle combinazioni di n oggetti a 4 a 4 è uguale al numero delle combinazioni degli stessi oggetti a 3 a 3. Si trovi n .
- 5** In una delle sue opere G. Galilei fa porre da Salviati, uno dei personaggi, la seguente questione riguardante l'insieme \mathbb{N} dei numeri naturali («i numeri tutti»). Dice Salviati: «...se io dirò, i numeri tutti, comprendendo i quadrati e i non quadrati, esser più che i quadrati soli, dirò proposizione verissima: non è così?». Come si può rispondere all'interrogativo posto e con quali argomentazioni?
- 6** Di tutti i coni inscritti in una sfera di raggio 10 cm, qual è quello di superficie laterale massima?
- 7** Un test d'esame consta di dieci domande, per ciascuna delle quali si deve scegliere l'unica risposta corretta fra quattro alternative. Qual è la probabilità che, rispondendo a caso alle dieci domande, almeno due risposte risultino corrette?
- 8** In che cosa consiste il problema della quadratura del cerchio? Perché è citato così spesso?
- 9** Si provi che, nello spazio ordinario a tre dimensioni, il luogo geometrico dei punti equidistanti dai tre vertici di un triangolo rettangolo è la retta perpendicolare al piano del triangolo passante per il punto medio dell'ipotenusa.
- 10** Nella figura sotto, denotati con I, II e III, sono disegnati tre grafici. Uno di essi è il grafico di una funzione f , un altro lo è della funzione derivata f' e l'altro ancora di f'' . Quale delle seguenti alternative identifica correttamente ciascuno dei tre grafici? Si motivi la risposta.



	f	f'	f''
A	I	II	III
B	I	III	II
C	II	III	I
D	III	II	I
E	III	I	II

◀ Figura 1.

Durata massima della prova: 6 ore.

è consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.