

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO CORSO DI ORDINAMENTO • 2011

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

■ PROBLEMA 1

Si considerino le funzioni f e g definite, per tutti gli x reali, da:

$$f(x) = x^3 - 4x \quad \text{e} \quad g(x) = \sin \pi x.$$

1. Fissato un conveniente sistema di riferimento cartesiano Oxy , si studino f e g e se ne disegnano i rispettivi grafici G_f e G_g .
2. Si calcolino le ascisse dei punti di intersezione di G_f con la retta $y = -3$. Successivamente, si considerino i punti di G_g a tangente orizzontale la cui ascissa è compresa nell'intervallo $[-6; 6]$ e se ne indichino le coordinate.
3. Sia R la regione del piano delimitata da G_f e G_g sull'intervallo $[0; 2]$. Si calcoli l'area di R .
4. La regione R rappresenta la superficie libera dell'acqua contenuta in una vasca. In ogni punto di R a distanza x dall'asse y la misura della profondità dell'acqua nella vasca è data da $b(x) = 3 - x$. Quale integrale definito dà il volume dell'acqua? Supposte le misure in metri, quanti litri di acqua contiene la vasca?

■ PROBLEMA 2

Sia f la funzione definita sull'insieme \mathbb{R} dei numeri reali da:

$$f(x) = (ax + b)e^{-\frac{x}{3}} + 3,$$

dove a e b sono due numeri reali che si chiede di determinare sapendo che f ammette un massimo nel punto d'ascissa 4 e che $f(0) = 2$.

1. Si provi che $a = 1$ e $b = -1$.
2. Si studi su \mathbb{R} la funzione $f(x) = (x - 1)e^{-\frac{x}{3}} + 3$, e se ne tracci il grafico Γ nel sistema di riferimento Oxy .
3. Si calcoli l'area della regione di piano del primo quadrante delimitata da Γ , dall'asse y e dalla retta $y = 3$.
4. Il profitto di un'azienda, in milioni di euro, è stato rappresentato nella tabella sottostante designando con x_i l'anno di osservazione e con y_i il corrispondente profitto.

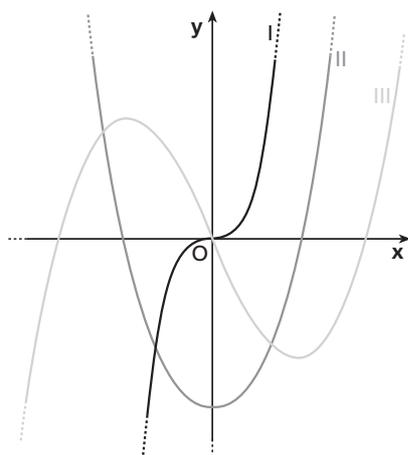
Anno	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
x_i	0	1	2	3	4	5	6
y_i	1,97	3,02	3,49	3,71	3,80	3,76	3,65

Si cerca una funzione che spieghi il fenomeno dell'andamento del profitto giudicando accettabile la funzione g definita su \mathbb{R}^+ se per ciascun x_i , oggetto dell'osservazione, si ha: $|g(x_i) - y_i| \leq 10^{-1}$. Si verifichi, con l'aiuto di una calcolatrice, che è accettabile la funzione f del punto 2 e si dica, giustificando la risposta, se è vero che, in tal caso, l'evoluzione del fenomeno non potrà portare a profitti inferiori ai 3 milioni di euro.

QUESTIONARIO

- 1 Un serbatoio ha la stessa capacità del cilindro di massimo volume inscritto in una sfera di raggio 60 cm. Qual è la capacità in litri del serbatoio?
- 2 Si trovi il punto della curva $y = \sqrt{x}$ più vicino al punto di coordinate (4; 0).
- 3 Sia R la regione delimitata dalla curva $y = x^3$, dall'asse x e dalla retta $x = 2$ e sia W il solido ottenuto dalla rotazione di R attorno all'asse y . Si calcoli il volume di W .
- 4 Il numero delle combinazioni di n oggetti a 4 a 4 è uguale al numero delle combinazioni degli stessi oggetti a 3 a 3. Si trovi n .
- 5 Si trovi l'area della regione delimitata dalla curva $y = \cos x$ e dall'asse x , da $x = 1$ a $x = 2$ radianti.
- 6 Si calcoli:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{x - a}.$$
- 7 Si provi che l'equazione: $x^{2011} + 2011x + 12 = 0$ ha una sola radice compresa fra -1 e 0 .
- 8 In che cosa consiste il problema della quadratura del cerchio? Perché è citato così spesso?
- 9 Si provi che, nello spazio ordinario a tre dimensioni, il luogo geometrico dei punti equidistanti dai tre vertici di un triangolo rettangolo è la retta perpendicolare al piano del triangolo passante per il punto medio dell'ipotenusa.
- 10 Nella figura sotto, denotati con I, II e III, sono disegnati tre grafici. Uno di essi è il grafico di una funzione f , un altro lo è della funzione derivata f' e l'altro ancora di f'' . Quale delle seguenti alternative identifica correttamente ciascuno dei tre grafici? Si motivi la risposta.



	f	f'	f''
A	I	II	III
B	I	III	II
C	II	III	I
D	III	II	I
E	III	I	II

◀ Figura 1.

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.