ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2010

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Sia $ABCD$ un quadrato di lato 1, P un punto di AB e γ la circonferenza di centro P e raggio AP. Si prenda sul lato BC un punto Q in modo che sia il centro di una circonferenza λ passante per C e tangente esternamente a γ.

1. Se $AP = x$, si provi che il raggio di λ in funzione di x è dato da $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$.
2. Riferito il piano a un sistema di coordinate Oxy, si tracci, indipendentemente dalle limitazioni poste a x dal problema geometrico, il grafico di $f(x)$. La funzione $f(x)$ è invertibile? Se sì, qual è il grafico della sua inversa?
3. Sia $g(x) = \left|\dfrac{1-x}{1+x}\right|, x \in \mathbb{R} - \{-1\}$, qual è l'equazione della retta tangente al grafico di $g(x)$ nel punto $R(0; 1)$? E nel punto $S(1; 0)$? Cosa si può dire della tangente al grafico di $g(x)$ nel punto S?
4. Si calcoli l'area del triangolo mistilineo ROS, ove l'arco RS appartiene al grafico di $f(x)$ o, indifferentemente, di $g(x)$.

PROBLEMA 2

Nel piano, riferito a coordinate cartesiane Oxy, si consideri la funzione f definita da $f(x) = b^x$ $(b > 0, b \neq 1)$.

1. Sia G_b il grafico di $f(x)$ relativo a un assegnato valore di b. Si illustri come varia G_b al variare di b.
2. Sia P un punto di G_b. La tangente a G_b in P e la parallela per P all'asse y intersecano l'asse x rispettivamente in A e in B. Si dimostri che, qualsiasi sia P, il segmento AB ha lunghezza costante. Per quali valori di b la lunghezza di AB è uguale a 1?
3. Sia r la retta passante per O tangente a G_e ($e =$ numero di *Nepero*). Qual è la misura in radianti dell'angolo che la retta r forma con il semiasse positivo delle ascisse?
4. Si calcoli l'area della regione del primo quadrante delimitata dall'asse y, da G_e e dalla retta d'equazione $y = e$.

QUESTIONARIO

1 Sia $p(x)$ un polinomio di grado n. Si dimostri che la sua derivata n-esima è $p^{(n)}(x) = n!a_n$ dove a_n è il coefficiente di x^n.

2 Siano ABC un triangolo rettangolo in A, r la retta perpendicolare in B al piano del triangolo e P un punto di r distinto da B. Si dimostri che i tre triangoli PAB, PBC, PCA sono triangoli rettangoli.

3 Sia γ il grafico di $f(x) = e^{3x} + 1$. Per quale valore di x la retta tangente a γ in $(x; f(x))$ ha pendenza uguale a 2?

4 Si calcoli: $\lim_{x \to \infty} 4x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$.

5 Un serbatoio ha la stessa capacità del massimo cono circolare retto di apotema 80 cm. Qual è la capacità del serbatoio?

6 Si determini il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{\cos x}$.

7 Per quale o quali valori di k la funzione

$$h(x) = \begin{cases} 3x^2 - 11x - 4, & x \leq 4 \\ kx^2 - 2x - 1, & x > 4 \end{cases}$$

è continua in $x = 4$?

8 Se $n > 3$ e $\binom{n}{n-1}, \binom{n}{n-2}, \binom{n}{n-3}$ sono in progressione aritmetica, qual è il valore di n?

9 Si provi che non esiste un triangolo ABC, con $AB = 3$, $AC = 2$ e $A\hat{B}C = 45°$. Si provi altresì che se $AB = 3$, $AC = 2$ e $A\hat{B}C = 30°$, allora esistono due triangoli che soddisfano queste condizioni.

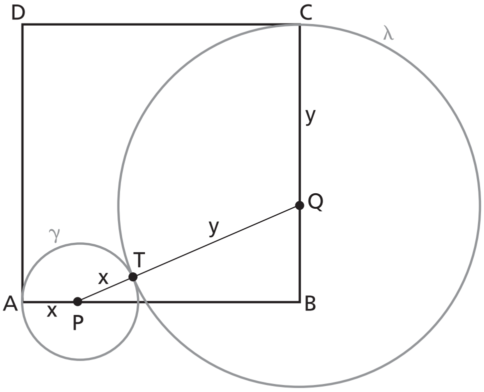
10 Si consideri la regione delimitata da $y = \sqrt{x}$, dall'asse x e dalla retta $x = 4$ e si calcoli il volume del solido che essa genera ruotando di un giro completo intorno all'asse y.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

PROBLEMA 1

1. In figura 1 sono rappresentati il quadrato $ABCD$ e le circonferenze γ e λ. Posto T il punto di tangenza tra le circonferenze e indicati con x e y i rispettivi raggi, risulta:

$$\overline{AP} = \overline{PT} = x, \quad \overline{PB} = 1 - x, \quad \text{con } 0 < x < 1,$$
$$\overline{CQ} = \overline{QT} = y, \quad \overline{BQ} = 1 - y, \quad \text{con } 0 < y < 1.$$



◀ **Figura 1.**

Per ricavare y in funzione di x, applichiamo al triangolo rettangolo PBQ il teorema di Pitagora:

$$\overline{PQ}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{BQ}^2 \;\rightarrow\; (x+y)^2 = (1-x)^2 + (1-y)^2 \;\rightarrow$$
$$x^2 + y^2 + 2xy = 1 + x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y \;\rightarrow\; 2y(x+1) = 2(-x+1) \;\rightarrow$$
$$y = \frac{1-x}{1+x} \;\rightarrow\; f(x) = \frac{1-x}{1+x}.$$

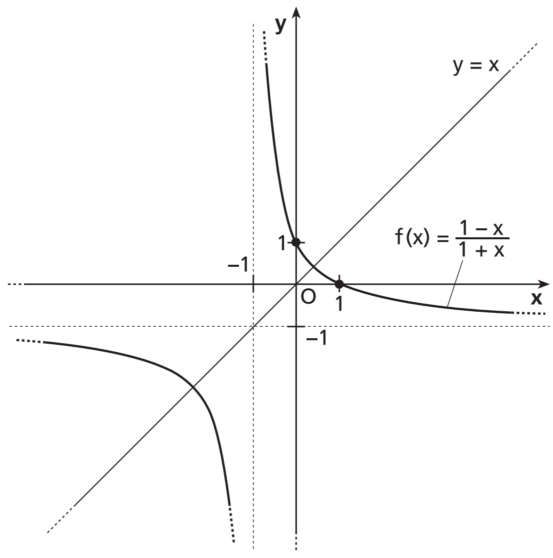
2. La funzione $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$ è una funzione omografica definita per $x \neq -1$, di asintoti $x = -1$ e $y = -1$, di centro di simmetria $(-1; -1)$; le intersezioni con gli assi sono i punti $(0; 1)$ e $(1; 0)$, il suo grafico è simmetrico rispetto alla bisettrice del I e III quadrante (figura 2).
La funzione $f(x)$ è una funzione invertibile perché suriettiva per $y \neq -1$ e iniettiva nel suo dominio. Ricaviamo x in funzione di y:

$$y = \frac{1-x}{1+x} \;\rightarrow\; y + xy = 1 - x \;\rightarrow$$

$$x(y+1) = 1 - y \;\rightarrow\; x = \frac{1-y}{y+1},$$

scambiamo la x con la y:

$$y = \frac{1-x}{1+x},$$

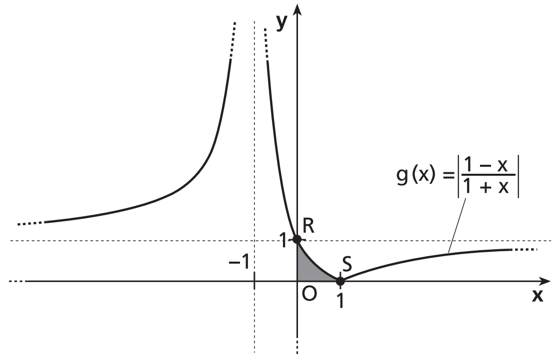


▲ **Figura 2.**

pertanto $f^{-1}(x) = f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$. Il grafico della funzione inversa $f^{-1}(x)$ coincide con quello di $f(x)$, come si poteva prevedere dalla simmetria del grafico di f rispetto alla bisettrice del I e III quadrante.

3. Poiché $g(x) = |f(x)|$, osservando il grafico di $f(x)$ in figura 2 possiamo scrivere l'espressione analitica di $g(x)$ e rappresentare il suo grafico (figura 3):

$$g(x) = \begin{cases} f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}, & \text{se} -1 < x \leq 1 \\ -f(x) = -\dfrac{1-x}{1+x}, & \text{se } x < -1 \vee x > 1 \end{cases}$$



▲ **Figura 3.**

In generale l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $g(x)$ in un generico punto $(x_0; y_0)$, se esiste e non è parallela all'asse y, ha equazione:

$$y - y_0 = g'(x_0)(x - x_0).$$

Calcoliamo la funzione derivata prima:

$$g'(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{(1+x)^2}, & \text{se} -1 < x \leq 1 \\ \dfrac{2}{(1+x)^2}, & \text{se} < -1 \vee x > 1 \end{cases}$$

Nel punto $x_R = 0$, risulta $g'(0) = -2$ e la retta tangente al grafico nel punto $R(0; 1)$ ha equazione:

$$y - 1 = -2(x - 0) \quad \rightarrow \quad y = -2x + 1.$$

Nel punto $x_S = 1$ è necessario calcolare la derivata sinistra e destra:

$$g'_-(1) = \lim_{x \to 1^-} \left[-\frac{2}{(1+x)^2} \right] = -\frac{1}{2}, \; g'_+(1) = \lim_{x \to 1^+} \left[\frac{2}{(1+x)^2} \right] = \frac{1}{2}.$$

Poiché per $x_S = 1$, i valori della derivata sinistra e destra sono diversi, la funzione $g(x)$ non è derivabile in tale punto e non esiste una retta tangente al grafico di $g(x)$ nel punto $S(1; 0)$, ma esistono la tangente destra e sinistra e S è un punto angoloso.

4. Osserviamo il triangolo mistilineo *ROS* evidenziato in figura 3.
La sua area corrisponde al valore del seguente integrale:

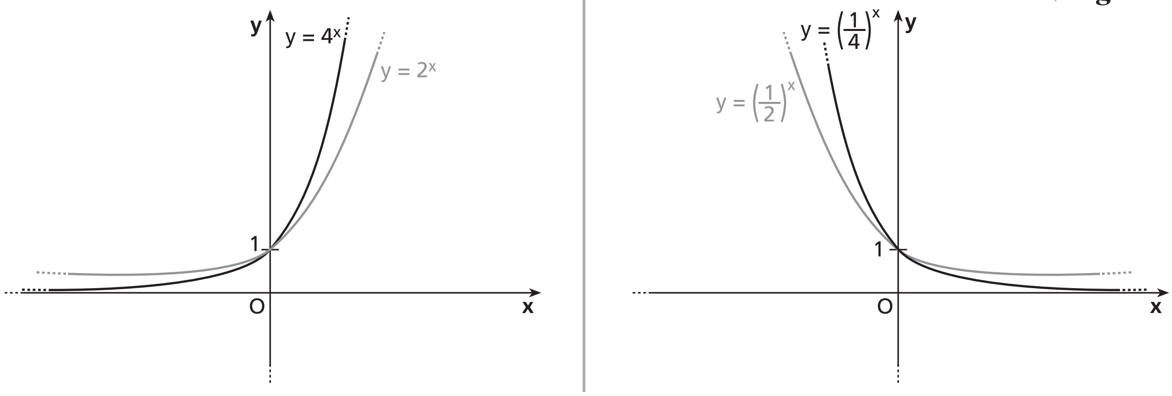
$$\mathcal{A} = \int_0^1 \frac{1-x}{1+x}\,dx = \int_0^1 \frac{-(1+x)+2}{1+x}\,dx = \int_0^1 \left(-1 + \frac{2}{1+x} \right) dx =$$
$$= -[x]_0^1 + 2[\ln(1+x)]_0^1 = -1 + 0 + 2(\ln 2 - \ln 1) = -1 + 2\ln 2 = \ln 4 - 1.$$

PROBLEMA 2

1. La funzione $f(x) = b^x$ $(b > 0,\ b \neq 1)$ è la cosiddetta *funzione esponenziale* di base b; si distinguono due casi:

- per $b > 1$ essa è strettamente crescente, passante per il punto $(0; 1)$, con asintoto $y = 0$ per $x \rightarrow -\infty$;
- per $0 < b < 1$ essa è strettamente decrescente, passante per il punto $(0; 1)$, con asintoto $y = 0$ per $x \rightarrow -\infty$.

In figura 4 è rappresentato il relativo grafico G_b per alcuni valori della base b.



▼ **Figura 4.**

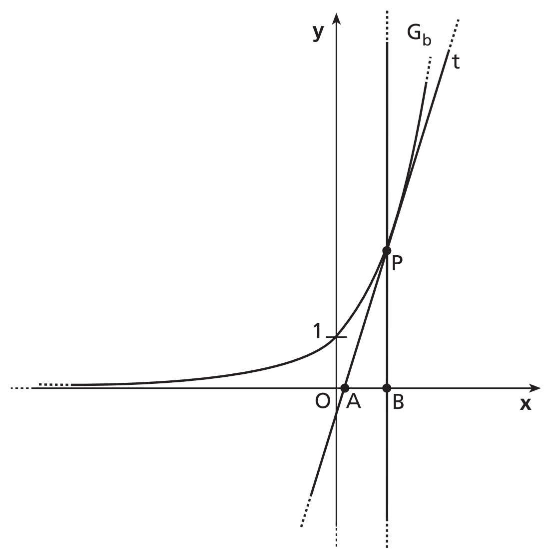
2. A titolo di esempio, consideriamo il grafico G_b nel caso $b > 1$. Sia P un punto generico di G_b di coordinate $P(a;\ b^a)$ con $a \in \mathbb{R}$ (figura 5).
La retta t, tangente in P al grafico, ha equazione $y - b^a = f'(a)(x - a)$ e, ricordando che $f'(x) = b^x \ln b$, otteniamo:

$$t\colon y = (b^a \ln b)x + b^a(1 - a \ln b).$$

Il punto B, intersezione della parallela all'asse y e passante per P, ha coordinate $B(a; 0)$.
Ricaviamo le coordinate del punto A risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} y = (b^a \ln b)x + b^a(1 - a \ln b) \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x = a - \dfrac{1}{\ln b} \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow A\left(a - \frac{1}{\ln b};\ 0\right).$$



▲ **Figura 5.**

La lunghezza del segmento $\overline{AB}$ risulta:

$$\overline{AB} = \left| a - \left(a - \frac{1}{\ln b}\right) \right| = \left| \frac{1}{\ln b} \right|;$$

si osserva che tale lunghezza, essendo indipendente da a, cioè dalla scelta del punto P, è costante. Inoltre si noti che si perviene a tale risultato indipendentemente dal valore della base b cioè dal grafico G_b.
La lunghezza $\overline{AB}$ è uguale a 1 se e solo se vale:

$$\left| \frac{1}{\ln b} \right| = 1 \Leftrightarrow \ln b = \pm 1 \Leftrightarrow b = e \vee b = \frac{1}{e}.$$

3. Posto $b = e$, consideriamo la funzione esponenziale $y = e^x$. Sia $Q(c;\ e^c)$ un punto generico di G_e. La retta tangente a G_e in Q ha equazione:

$$t_Q\colon y = e^c x + e^c(1 - c).$$

Imponiamo a tale retta il passaggio per l'origine $O(0; 0)$:

$$0 = e^c \cdot 0 + e^c(1 - c) \quad \rightarrow \quad c = 1.$$

Pertanto la retta r passante per l'origine e tangente al grafico G_e ha equazione:

r: $y = ex$,

Essa ha coefficiente angolare uguale a e e l'angolo in radianti che forma con il semiasse positivo delle ascisse vale:

arctg $e \simeq 1{,}22$ rad.

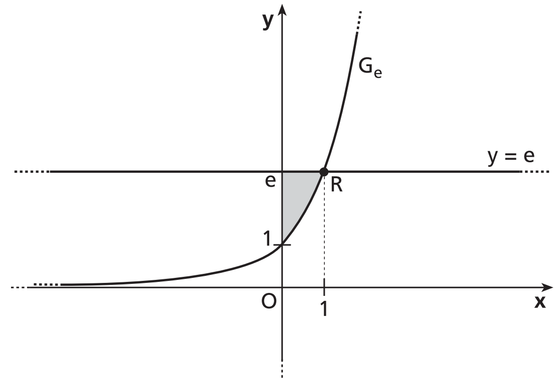
4. Consideriamo la regione di piano delimitata dall'asse y, da G_e e dalla retta di equazione $y = e$ (figura 6).

Ricaviamo le coordinate del punto R risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y = e^x \\ y = e \end{cases} \rightarrow \begin{cases} e = e^x \\ y = e \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = e \end{cases} \rightarrow R(1; e).$$

La regione di piano ha superficie S:

$$S = \int_0^1 (e - e^x)dx = \int_0^1 edx - \int_0^1 e^x dx = [ex]_0^1 - [e^x]_0^1 = e - (e-1) = 1.$$



▲ **Figura 6.**

QUESTIONARIO

1 Data la funzione polinomiale $p(x)$ di grado n:

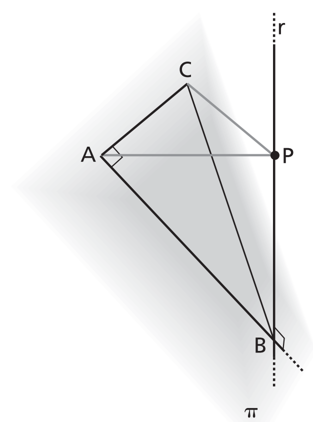
$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \text{ con } a_i \in \mathbb{R},$$

si calcola la sua derivata prima, seconda, terza, …, n-esima:

$$p'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + 2a_2 x + a_1,$$
$$p''(x) = n(n-1)a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3} + \ldots + 3 \cdot 2a_3 x + 2a_2,$$
$$p'''(x) = n(n-1)(n-2)a_n x^{n-3} + (n-1)(n-2)(n-3)a_{n-1}x^{n-4} + \ldots + 4 \cdot 3 \cdot 2a_4 x + 3 \cdot 2a_3,$$
$$\ldots$$
$$p^{(n)}(x) = [n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1]a_n = n!a_n.$$

2 Consideriamo il triangolo rettangolo ABC contenuto nel piano π e la retta r perpendicolare al piano in B (figura 7).

Poiché dal piede B passa la perpendicolare AB alla retta AC del piano π, per il teorema delle tre perpendicolari, la retta AC risulterà perpendicolare al piano individuato da AB e PB, cioè ABP. Se ne deduce che AC è perpendicolare a tutte le rette del piano ABP passanti per A e in particolare è perpendicolare ad AP, ovvero $C\hat{A}P$ è retto e quindi il triangolo PCA è rettangolo. Inoltre, poiché per ipotesi PB è perpendicolare al piano ABC, PB è perpendicolare ad AB e a CB, quindi i triangoli PAB e PBC sono rettangoli in B.



▲ **Figura 7.**

3 La funzione $f(x) = e^{3x} + 1$ ha dominio $\mathbb{R}$ ed è derivabile in ogni punto. Ne segue che la pendenza (cioè il coefficiente angolare) della retta tangente nel punto $(x; f(x))$ è uguale alla derivata prima della funzione calcolata in x. La derivata di f vale:

$$f'(x) = 3e^{3x}.$$

Troviamo per quale valore di x tale derivata assume il valore 2:

$$3e^{3x} = 2 \rightarrow e^{3x} = \frac{2}{3} \rightarrow 3x = \ln\frac{2}{3} \rightarrow x = \frac{1}{3}\ln\frac{2}{3}.$$

In maniera equivalente possiamo scrivere $x = \frac{1}{3}(\ln 2 - \ln 3)$ o anche $x = \ln \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$.

4 Dato il limite $\lim\limits_{x\to\infty} 4x \operatorname{sen}\frac{1}{x}$, operiamo il cambio di variabile $t = \frac{1}{x}$:

$$\lim_{x\to\infty} 4x \operatorname{sen}\frac{1}{x} = \lim_{t\to 0}\left(4\cdot\frac{1}{t}\operatorname{sen} t\right) =$$

applichiamo il limite notevole $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1$:

$$= \lim_{t\to 0}\left(4\cdot\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right) = 4\cdot 1 = 4.$$

5 Dato il cono circolare retto in figura 8, sia x l'altezza, r il raggio del cerchio di base e $a = 80$ cm $= 8$ dm l'apotema. Omettendo l'unità di misura, il raggio r e il volume V del cono risultano rispettivamente:

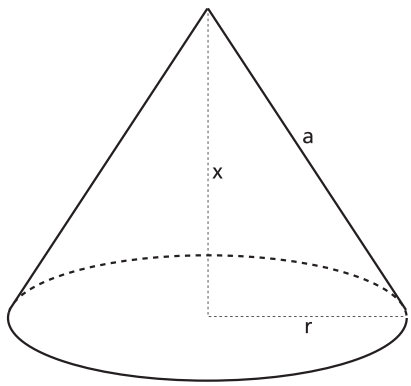
$$r = \sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{64 - x^2}, \text{ con } 0 < x < 8;$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 x = \frac{\pi}{3}(64 - x^2)x = \frac{\pi}{3}(64x - x^3).$$

Consideriamo la funzione:

$$V(x) = \frac{\pi}{3}(64x - x^3), \text{ con } 0 < x < 8,$$

calcoliamo la sua derivata prima e studiamone il segno nell'intervallo dei limiti geometrici:



▲ **Figura 8.**

$$V'(x) = \frac{\pi}{3}(64 - 3x^2),$$

$$V'(x) = 0 \quad \text{per } x = \frac{8\sqrt{3}}{3}, \qquad V'(x) > 0 \quad \text{per } 0 < x < \frac{8\sqrt{3}}{3}, \qquad V'(x) < 0 \quad \text{per } \frac{8\sqrt{3}}{3} < x < 8.$$

Pertanto il volume del cono è massimo per $x = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ e vale:

$$V\left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{3}\left(64 - \frac{64}{3}\right)\frac{8\sqrt{3}}{3} = \frac{1024\sqrt{3}\pi}{27}\,\text{dm}^3.$$

Poiché $1\text{dm}^3 = 1\ell$, il volume in litri del serbatoio vale:

$$V = \frac{1024\sqrt{3}\pi}{27}\,\text{dm}^3 = \frac{1024\sqrt{3}\pi}{27}\,\ell \simeq 206{,}4\ \ell.$$

6 Il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{\cos x}$ deriva dalla condizione di esistenza della radice quadrata, pertanto:

$$\cos x \geq 0,$$

che ha soluzioni:

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \text{ con } k \in \mathbb{Z}.$$

7 La funzione $h(x)$ è continua in $x = 4$, se $\lim_{x \to 4^+} h(x) = h(4)$. Calcoliamo:

$$\lim_{x \to 4^+} h(x) = 16k - 2 \cdot 4 - 1 = 16k - 9,$$

$$h(4) = 3 \cdot 16 - 11 \cdot 4 - 4 = 48 - 44 - 4 = 0,$$

uguagliamo gli ultimi membri:

$$16k - 9 = 0 \quad \rightarrow \quad k = \frac{9}{16}.$$

8 Una successione numerica si dice *progressione aritmetica* se la differenza fra ogni termine e il suo precedente è costante. Pertanto deve valere:

$$\binom{n}{n-2} - \binom{n}{n-1} = \binom{n}{n-3} - \binom{n}{n-2} \text{ con } n > 3 \text{ e naturale,}$$

ovvero:

$$2\binom{n}{n-2} - \binom{n}{n-1} - \binom{n}{n-3} = 0.$$

Applichiamo per ogni coefficiente binomiale la legge delle classi complementari, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$:

$$2\binom{n}{2} - \binom{n}{1} - \binom{n}{3} = 0.$$

Sviluppiamo i coefficienti binomiali e risolviamo l'equazione in $n > 3$ e naturale:

$$2\frac{n(n-1)}{2} - n - \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2} = 0 \quad \rightarrow \quad n(n-1) - n - \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 0 \quad \rightarrow$$

$$n(6n - 12 - n^2 + 3n - 2) = 0 \quad \rightarrow \quad n(n^2 - 9n + 14) = 0 \quad \rightarrow$$

$n = 0$ non accettabile;

$$n = \frac{9 \pm \sqrt{25}}{2} = \begin{cases} 7 \text{ accettabile} \\ 2 \text{ non accettabile} \end{cases}$$

Pertanto il valore di n per cui i coefficienti dati sono in progressione aritmetica è 7.

9 Consideriamo un segmento $AB = 3$, un angolo di ampiezza 45° di vertice B, con lato AB e secondo lato la semiretta r, la circonferenza centrata in A di raggio 2 (figura 9).

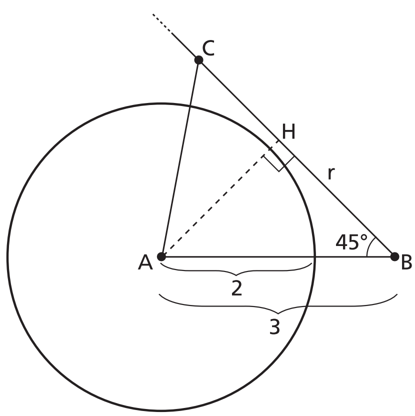
Al variare di C in r otteniamo tutti i possibili triangoli ABC con $\overline{AB} = 3$ e $A\hat{B}C = 45°$. Osserviamo che il segmento AH, distanza di A da r ha lunghezza pari a:

$$\overline{AH} = \frac{\overline{AB}}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{2}.$$

Il lato AC, ipotenusa del triangolo rettangolo ACH, deve essere maggiore di AH, cateto dello stesso triangolo, ovvero:

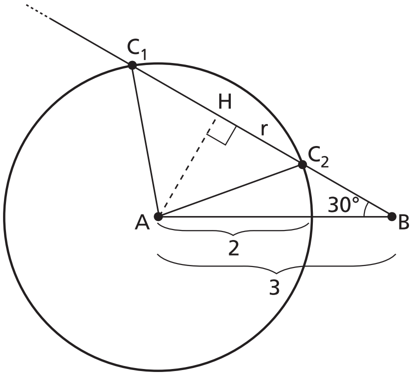
$$\overline{AC} > \overline{AH} = \frac{3}{2}\sqrt{2} \simeq 2{,}12.$$

Pertanto non esiste un triangolo ABC con $\overline{AC} = 2$.



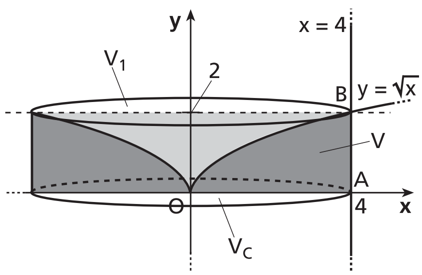
▲ **Figura 9.**

Se invece $A\hat{B}r = 30°$ (figura 10), la distanza AH tra A ed r risulta pari a $\frac{3}{2}$, che è minore di 2. Esistono quindi due punti, C_1 e C_2, simmetrici rispetto ad AH, tali che $\overline{AC_1} = \overline{AC_2} = 2$. Essi si ottengono dall'intersezione di r con la circonferenza di centro A e raggio 2.



▲ **Figura 10.**

10 In figura 11 è rappresentato il solido di volume V ottenuto dalla rotazione intorno all'asse y della regione delimitata da $y = \sqrt{x}$, dall'asse x e dalla retta $x = 4$.
Si osserva che tale volume si ottiene come differenza tra il volume del cilindro V_C, di raggio OA con $A(4; 0)$, e altezza AB con $B(4; 2)$, e il volume V_1 del solido, ottenuto dalla rotazione della parte di piano delimitata da $y = \sqrt{x}$, $y = 2$ e l'asse y.
Risulta:



▲ **Figura 11.**

$$V_C = \pi \overline{OA}^2 \cdot \overline{AB} = \pi \cdot 4^2 \cdot 2 = 32\pi;$$

poiché il volume V_1 è uguale al volume del solido di rotazione intorno all'asse x della regione delimitata dal grafico della funzione $y = x^2$, dall'asse x e da $x = 2$, si trova:

$$V_1 = \pi\int_0^2 (x^2)^2 dx = \pi\int_0^2 x^4\, dx = \pi\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2 = \frac{32}{5}\pi.$$

Pertanto il volume V vale:

$$V = V_C - V_1 = 32\pi - \frac{32}{5}\pi = \frac{128}{5}\pi.$$