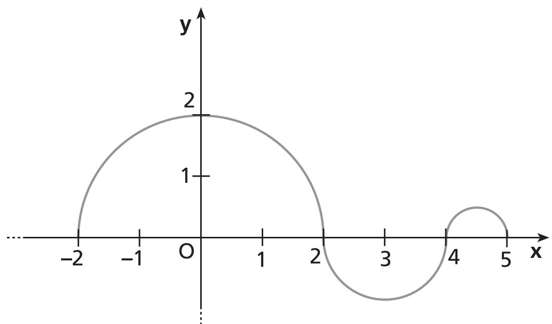
ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2010

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Nella figura che segue è riportato il grafico di $g(x)$ per $-2 \leq x \leq 5$ essendo g la derivata di una funzione f. Il grafico consiste di tre semicirconferenze con centri in $(0; 0)$, $(3; 0)$, $\left(\frac{9}{2}; 0\right)$ e raggi rispettivi 2, 1, $\frac{1}{2}$.



◀ **Figura 1.**

a) Si scriva un'espressione analitica di $g(x)$. Vi sono punti in cui $g(x)$ non è derivabile? Se sì, quali sono? E perché?

b) Per quali valori di x, $-2 < x < 5$, la funzione f presenta un massimo o un minimo relativo? Si illustri il ragionamento seguito.

c) Se $f(x) = \int_{-2}^{x} g(t)dt$, si determini $f(4)$ e $f(1)$.

d) Si determinino i punti in cui la funzione f ha derivata seconda nulla. Cosa si può dire sul segno di $f(x)$? Qual è l'andamento qualitativo di $f(x)$?

PROBLEMA 2

Nel piano riferito a un sistema Oxy di coordinate cartesiane siano assegnate le parabole d'equazioni:

$$y^2 = 2x \quad \text{e} \quad x^2 = y.$$

a) Si disegnino le due parabole e se ne determinino le coordinate dei fuochi e le equazioni delle rispettive rette direttrici. Si denoti con A il punto d'intersezione delle due parabole diverso dall'origine O.

b) L'ascissa di A è $\sqrt[3]{2}$; si dica a quale problema classico dell'antichità è legato tale numero e, mediante l'applicazione di un metodo iterativo di calcolo, se ne trovi il valore approssimato a meno di 10^{-2}.

c) Sia D la parte di piano delimitata dagli archi delle due parabole di estremi O e A. Si determini la retta r, parallela all'asse x, che stacca su D il segmento di lunghezza massima.

d) Si consideri il solido W ottenuto dalla rotazione di D intorno all'asse x. Se si taglia W con piani ortogonali all'asse x, quale forma hanno le sezioni ottenute? Si calcoli il volume di W.

QUESTIONARIO

1 Sia $p(x)$ un polinomio di grado n. Si dimostri che la sua derivata n-esima è $p^{(n)}(x) = n!a_n$ dove a_n è il coefficiente di x^n.

2 Siano ABC un triangolo rettangolo in A, r la retta perpendicolare in B al piano del triangolo e P un punto di r distinto da B. Si dimostri che i tre triangoli PAB, PBC, PCA sono triangoli rettangoli.

3 Sia r la retta d'equazione $y = ax$ tangente al grafico di $y = e^x$. Qual è la misura in gradi e primi sessagesimali dell'angolo che la retta r forma con il semiasse positivo delle ascisse?

4 Si calcoli con la precisione di due cifre decimali lo zero della funzione $f(x) = \sqrt[3]{x} + x^3 - 1$. Come si può essere certi che esiste un unico zero?

5 Sia G il grafico di una funzione $x \rightarrow f(x)$ con $x \in \mathbb{R}$. Si illustri in che modo è possibile stabilire se G è simmetrico rispetto alla retta $x = k$.

6 Si trovi l'equazione cartesiana del luogo geometrico descritto dal punto P di coordinate $(3\cos t; 2\,\mathrm{sen}\, t)$ al variare di t, $0 \leq t \leq 2\pi$.

7 Per la ricorrenza della festa della mamma, la sig.ra Luisa organizza una cena a casa sua, con le sue amiche che hanno almeno una figlia femmina. La sig.ra Anna è una delle invitate e perciò ha almeno una figlia femmina. Durante la cena, la sig.ra Anna dichiara di avere esattamente due figli. Si chiede: qual è la probabilità che anche l'altro figlio della sig.ra Anna sia femmina? Si argomenti la risposta.

8 Se $n > 3$ e $\binom{n}{n-1}, \binom{n}{n-2}, \binom{n}{n-3}$ sono in progressione aritmetica, qual è il valore di n?

9 Si provi che non esiste un triangolo ABC, con $AB = 3$, $AC = 2$ e $A\hat{B}C = 45°$. Si provi altresì che se $AB = 3$, $AC = 2$ e $A\hat{B}C = 30°$, allora esistono due triangoli che soddisfano queste condizioni.

10 Si consideri la regione R delimitata da $y = \sqrt{x}$, dall'asse x e dalla retta $x = 4$.
L'integrale $\int_0^4 2\pi x\sqrt{x}\,dx$ fornisce il volume del solido:

- **A** generato da R nella rotazione intorno all'asse x;
- **B** generato da R nella rotazione intorno all'asse y;
- **C** di base R le cui sezioni con piani perpendicolari all'asse x sono semicerchi di raggio $\sqrt{x}$;
- **D** nessuno di questi.

Si motivi esaurientemente la risposta.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

PROBLEMA 1

a) Determiniamo l'espressione analitica di $g(x)$:

$$g(x)=\begin{cases}\sqrt{4-x^2} & \text{se } -2\leq x\leq 2\\ -\sqrt{1-(x-3)^2} & \text{se } 2<x\leq 4\\ \sqrt{\dfrac{1}{4}-\left(x-\dfrac{9}{2}\right)^2} & \text{se } 4<x\leq 5\end{cases} \quad\rightarrow\quad g(x)=\begin{cases}\sqrt{4-x^2} & \text{se } -2\leq x\leq 2\\ -\sqrt{-x^2+6x-8} & \text{se } 2<x\leq 4\\ \sqrt{-x^2+9x-20} & \text{se } 4<x\leq 5\end{cases}$$

Per stabilire i punti di non derivabilità calcoliamo $g'(x)$:

$$g'(x)=\begin{cases}-\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}} & \text{se } -2<x<2\\ \dfrac{x-3}{\sqrt{1-(x-3)^2}} & \text{se } 2<-x<4\\ -\dfrac{x-\dfrac{9}{2}}{\sqrt{\dfrac{1}{4}-\left(x-\dfrac{9}{2}\right)^2}} & \text{se } 4<x<5\end{cases}$$

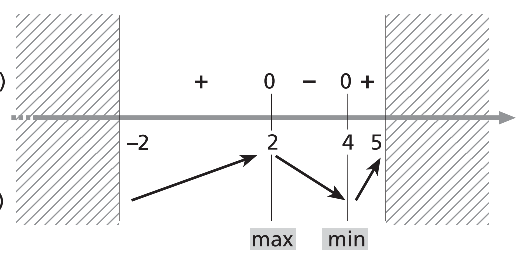
Calcoliamo i limiti negli estremi degli intervalli di definizione:

$$\lim_{x\to -2^+} g'(x)=\lim_{x\to -2^+}\left(-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\right)=+\infty,$$

pertanto la funzione $g(x)$ non è derivabile in $x=-2$;
analogamente la funzione $g(x)$ non è derivabile in $x=2$, $x=4$, $x=5$ poiché risulta:

$$\lim_{x\to 2} g'(x)=-\infty,\qquad \lim_{x\to 4} g'(x)=+\infty,\qquad \lim_{x\to 5^-} g'(x)=-\infty.$$

b) Poiché $g(x)$ rappresenta la derivata della funzione $f(x)$, i punti di massimo o minimo di quest'ultima sono individuati da quei punti di continuità dell'intervallo $-2<x<5$ in cui la funzione derivata g si annulla e nel cui intorno cambia di segno. Essi sono $x=2$, $x=4$.
In particolare, poiché $g(x)$ è positiva in un intorno sinistro sufficientemente piccolo di $x=2$ e negativa in un suo intorno destro, allora $x=2$ è un massimo relativo per $f(x)$ (figura 2).
Viceversa, $x=4$ è un minimo per $f(x)$.

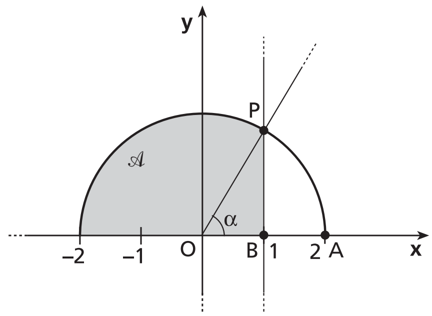


▲ **Figura 2.**

c) Considerato $f(x)=\int_{-2}^{x} g(t)dt$, risulta $f(4)=\int_{-2}^{4} g(t)dt$.
L'integrale al secondo membro corrisponde alla differenza tra le aree delle due semicirconferenze con centri $(0;0)$ e raggio 2 e $(3;0)$ e raggio 1 (figura 1):

$$f(4)=\frac{\pi\cdot 2^2}{2}-\frac{\pi\cdot 1^2}{2}=\frac{3}{2}\pi.$$

Per il calcolo di $f(1) = \int_{-2}^{1} g(t)dt$, l'integrale al secondo membro corrisponde all'area $\mathscr{A}$ della regione di piano evidenziata in figura 3.
Tale area corrisponde alla differenza tra l'area della semicirconferenza di raggio 2 e l'area del triangolo mistilineo APB, ove P ha coordinate $(1; \sqrt{3})$.
Determiniamo l'area del triangolo mistilineo come differenza tra l'area del settore circolare AOP di ampiezza $\alpha = \frac{\pi}{3}$ e l'area del triangolo OBP:



▲ **Figura 3.**

$$\mathscr{A}_{APB} = \frac{2 \cdot \frac{\pi}{3} \cdot 2}{2} - \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \rightarrow \quad \mathscr{A} = \frac{\pi \cdot 2^2}{2} - \left(\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{4}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

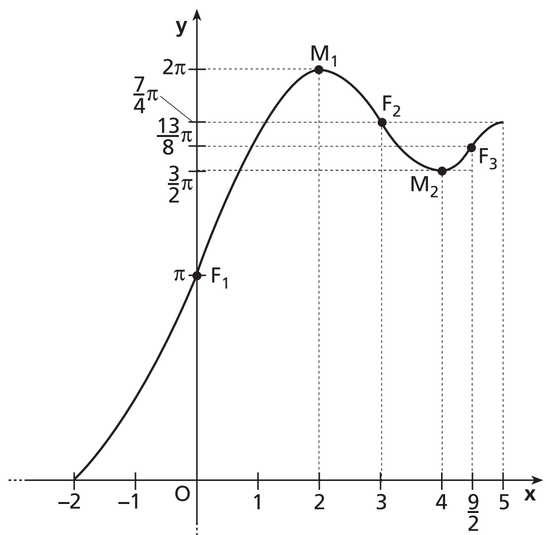
Segue allora che $f(1) = \frac{4}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

d) I punti dell'intervallo $]-2; 5[$ in cui $f(x)$ ha derivata seconda nulla sono i punti in cui la derivata prima di $g(x)$ si annulla. Si tratta quindi dei punti stazionari $x = 0$, $x = 3$, $x = \frac{9}{2}$.

In generale, non si può dedurre il segno di una funzione dalla conoscenza della sua derivata, poiché le primitive di una stessa funzione differiscono per una costante. Se invece si assume $f(x)$ come al punto c), ovvero $f(x) = \int_{-2}^{x} g(t)dt$, con $-2 \leq x \leq 5$ e se si osserva il grafico di g, si deduce che $f(x) \geq 0$ poiché $f(x)$ corrisponde all'area sottesa al grafico di $g(x)$. In particolare:

- $f(-2) = 0$, $\quad f(1) = \frac{4}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\quad f(2) = 2\pi$,
  $f(4) = \frac{3}{2}\pi$, $\quad f(5) = \frac{7}{4}\pi$;
- f è crescente per $-2 < x < 2 \lor 4 < x < 5$
- f ammette un massimo relativo in $x = 2$ e un minimo relativo in $x = 4$ con $M_1(2; 2\pi)$, $M_2\left(4; \frac{3}{2}\pi\right)$;
- f concava verso l'alto per $-2 < x < 0 \lor 3 < x < \frac{9}{2}$,
  verso il basso per $0 < x < 3 \lor \frac{9}{2} < x < 5$;
- f ammette flessi F_1, F_2, F_3 nei punti $x = 0$, $x = 3$, $x = \frac{9}{2}$; le corrispondenti ordinate valgono:

▼ **Figura 4.**

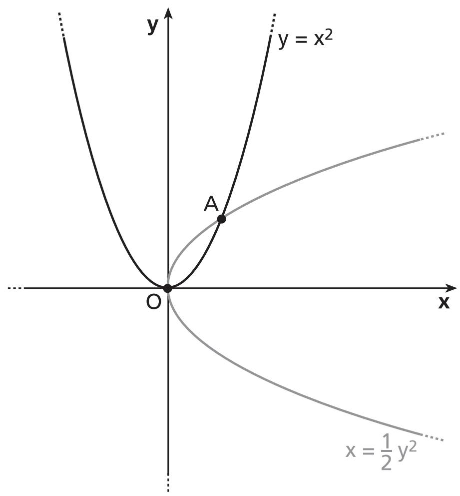


$$f(0) = \int_{-2}^{0} g(t)dt = \pi, \quad f(3) = \int_{-2}^{3} g(t)dt = \frac{7}{4}\pi, \quad f\left(\frac{9}{2}\right) = \int_{-2}^{\frac{9}{2}} g(t)dt = \frac{13}{8}\pi.$$

In figura 4 è rappresentato il grafico della funzione f.

PROBLEMA 2

a) La parabola di equazione $y^2 = 2x$, ovvero $x = \frac{1}{2}y^2$, ha l'asse di simmetria coincidente con l'asse delle ascisse, il vertice nell'origine di riferimento O. Il fuoco ha coordinate $\left(\frac{1-\Delta}{4a}; 0\right)$ cioè $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ e la direttrice ha equazione $x = -\frac{1}{2}$. La parabola $y = x^2$ ha asse di simmetria coincidente con l'asse delle ordinate, il vertice nell'origine degli assi, il fuoco di coordinate $\left(0; \frac{1-\Delta}{4a}\right)$, ovvero, $\left(0; \frac{1}{4}\right)$, l'asse di simmetria di equazione $y = -\frac{1}{4}$ (figura 5).



▲ **Figura 5.**

Per determinare le coordinate del punto di intersezione A delle due parabole, risolviamo il sistema costituito dalle equazioni delle due curve:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}y^2 \\ y = x^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}x^4 \\ y = x^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x(x^3 - 2) = 0 \\ y = x^2 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \sqrt[3]{2} \\ y = \sqrt[3]{4} \end{cases}$$

Ne segue quindi che il punto A ha coordinate $(\sqrt[3]{2}; \sqrt[3]{4})$.

b) Il numero $\sqrt[3]{2}$ è legato al problema della duplicazione del cubo: esso consiste nella possibilità di costruire un cubo avente volume doppio rispetto a quello di un cubo di spigolo l assegnato. Lo spigolo l' del cubo cercato deve soddisfare la relazione:

$l'^3 = 2l^3$ e quindi $l' = l\sqrt[3]{2}$.

Tale problema, insieme con quello della trisezione dell'angolo e a quello della quadratura del cerchio, costituisce uno dei tre problemi classici della geometria greca, rilevanti in quanto non risolubili con riga e compasso.
Per calcolare un valore approssimato di $\sqrt[3]{2}$, consideriamo la funzione $f(x) = x^3 - 2$ nell'intervallo $[1; 2]$. Essa è continua e derivabile e strettamente crescente, inoltre $f(1) = -2$ e $f(2) = 6$. In tale intervallo esiste un solo zero della funzione per il primo teorema dell'unicità dello zero. Utilizziamo il metodo delle tangenti per stimare tale zero della funzione e compiliamo la tabella seguente.

n	x_n	$f(x_n) = x^3 - 2$	$f'(x_n) = 3x^2$	$x_n - x_{n-1}$
0	2,000	6,000	12,000	
1	1,500	1,375	6,750	0,500
2	1,296	0,178	5,041	0,204
3	1,261	0,005	4,770	0,035
4	1,260	0,0004	4,763	0,001

Il valore di $\sqrt[3]{2}$ approssimato a meno di 10^{-2} è quindi 1,26.

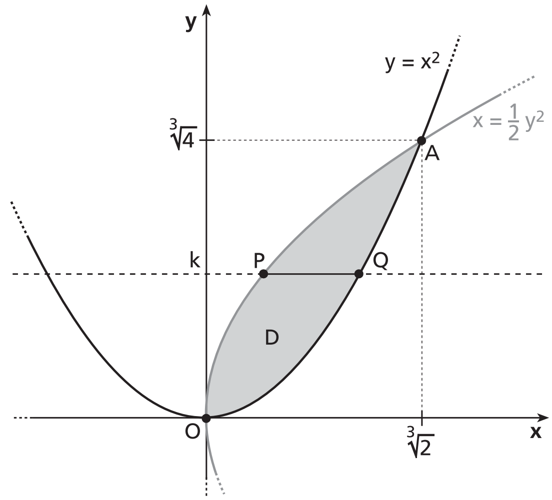
c) Una generica retta parallela all'asse x ha equazione $y = k$. Affinché intersechi la regione di piano D evidenziata in figura 6 deve essere $0 \leq k \leq \sqrt[3]{4}$.
Chiamati P e Q i punti intersezione della retta $y = k$ con le due parabole, risulta:

$$x_P = \frac{1}{2}k^2, \quad x_Q = \sqrt{k}, \quad \overline{PQ} = \sqrt{k} - \frac{1}{2}k^2.$$

Occorre calcolare il massimo della funzione $f(k) = \sqrt{k} - \frac{1}{2}k^2$ nel dominio $[0; \sqrt[3]{4}]$.

Per far ciò determiniamo la funzione derivata prima e il suo segno:

$$f'(k) = \frac{1}{2\sqrt{k}} - k,$$



▶ **Figura 6.**

$$f'(k) > 0 \text{ per } 0 < k < \sqrt[3]{\frac{1}{4}}, \quad f'(k) = 0 \text{ per } k = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}, \quad f'(k) < 0 \text{ per } \sqrt[3]{\frac{1}{4}} < k < \sqrt[3]{4}.$$

La funzione ha pertanto un massimo in $k = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ e per tale valore la retta corrispondente $y = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ stacca sulla regione D il segmento di lunghezza massima.

d) Se si taglia il solido W, ottenuto dalla rotazione di D intorno all'asse x (figura 7) con un piano ortogonale all'asse x, ovvero $x = h$, si hanno i seguenti casi:

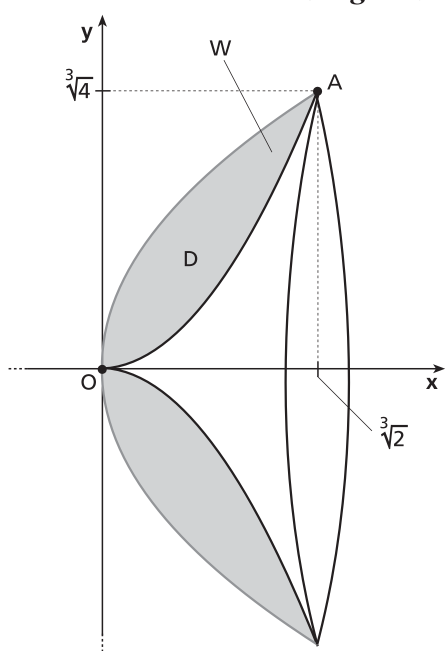
- per $h = 0$ si ottiene un punto;
- per $0 < h < \sqrt[3]{2}$ si ottiene una corona circolare;
- per $h = \sqrt[3]{2}$ si ottiene una circonferenza.

Il volume V del solido W vale:

$$V = \pi\left(\int_0^{\sqrt[3]{2}} (2x - x^4)dx\right) = \pi\left[x^2 - \frac{x^5}{5}\right]_0^{\sqrt[3]{2}} =$$

$$= \pi\left(\sqrt[3]{4} - \frac{2\sqrt[3]{4}}{5}\right) = \frac{3\sqrt[3]{4}}{5}\pi.$$

▼ **Figura 7.**



QUESTIONARIO

1 Vedi lo svolgimento del quesito 1 della prova del corso di ordinamento 2010.

2 Vedi lo svolgimento del quesito 2 della prova del corso di ordinamento 2010.

3 Data la funzione $y = f(x) = e^x$, si consideri un punto generico $P(\overline{x}, e^{\overline{x}})$ appartenente al suo grafico. La retta r, tangente in P alla curva, ha equazione $y - e^{\overline{x}} = f'(\overline{x})(x - \overline{x})$ e, ricordando che $f'(x) = e^x$, otteniamo:

$$r: y - e^{\overline{x}} = e^{\overline{x}}(x - \overline{x}) \quad \rightarrow \quad y = e^{\overline{x}}x + e^{\overline{x}}(1 - \overline{x}).$$

Per identità con l'equazione $y = ax$ della retta r, risulta:

$$\begin{cases} e^{\overline{x}}(1 - \overline{x}) = 0 \\ e^{\overline{x}} = a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \overline{x} = 1 \\ a = e \end{cases}$$

Pertanto, la tangente goniometrica dell'angolo γ, che la retta forma con il semiasse positivo delle ascisse, vale:

$$\mathrm{tg}\gamma = e$$

e l'angolo in gradi e primi sessagesimali risulta:

$$\gamma = \mathrm{arctg}\, e = 69{,}80\ldots^\circ \simeq 69°48'.$$

4 La funzione $f(x) = \sqrt[3]{x} + x^3 - 1$ è continua in $\mathbb{R}$.
Per accertarsi dell'esistenza di un unico zero, calcoliamo la derivata prima $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + 3x^2 = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + 3x^2.$$

La derivata $f'(x)$ è positiva per ogni $x \neq 0$ e perciò $f(x)$ è monotòna crescente; in tali condizioni, il primo teorema di unicità dello zero assicura l'esistenza di un unico zero in un intervallo $[a; b]$ limitato e chiuso, se $f(a) \cdot f(b) < 0$.
Calcoliamo $f(x)$ per alcuni valori:

$$f(0) = -1, \quad f(1) = 1.$$

Quindi esiste un unico zero di $f(x)$ nell'intervallo $]0; 1[$; calcoliamo un suo valore approssimato con la precisione di due cifre decimali applicando il metodo di bisezione e partendo dai valori $a_0 = 0$ e $b_0 = 1$.

a	$f(a)$	b	$f(b)$	$\frac{a+b}{2}$	$f\left(\frac{a+b}{2}\right)$
0	−1	1	1	0,5	−0,081
0,5	−0,081	1	1	0,75	0,33
0,5	−0,081	0,75	0,33	0,625	0,099
0,5	−0,081	0,625	0,099	0,5625	0,003

Lo zero approssimato a due cifre decimali della funzione è 0,56 con un errore minore di 0,003.

5 Le equazioni della simmetria rispetto all'asse $x = k$ sono:

$$\begin{cases} x' = 2k - x \\ y' = y \end{cases}$$

Il grafico G è simmetrico rispetto all'asse $x = k$ se, ogni volta che contiene un punto $P(x; f(x))$, contiene il simmetrico di P rispetto a $x = k$, cioè il punto $P'(2k - x; f(x))$.

Pertanto, G è simmetrico rispetto a $x=k$ se è verificata l'uguaglianza:

$$f(x)=f(2k-x),\ \forall\, x\in\mathbb{R}.$$

6 Le equazioni parametriche del luogo geometrico sono:

$$\begin{cases} x=3\cos t \\ y=2\,\mathrm{sen}\, t \end{cases} \quad \text{con} \quad 0\leq t\leq 2\pi.$$

Ricaviamo l'equazione cartesiana:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3}=\cos t \\ \dfrac{y}{2}=\mathrm{sen}\, t \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{9}=\cos^2 t \\ \dfrac{y^2}{4}=\mathrm{sen}^2\, t \end{cases}$$

sommiamo membro a membro le due equazioni del sistema e applichiamo l'identità fondamentale della goniometria $\cos^2 t+\mathrm{sen}^2\, t=1$, risulta:

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

Il luogo geometrico è quindi un'ellisse.

7 Anna ha due figli, che chiameremo F_1 e F_2. Poiché Anna è stata invitata alla festa, si sa che ci sono solo 3 possibilità, relativamente ai sessi di F_1 e F_2:

- F_1 e F_2 sono entrambe femmine,
- F_1 è maschio, F_2 è femmina,
- F_1 è femmina, F_2 è maschio.

Si hanno quindi tre casi possibili ed equiprobabili dei quali solo il primo è favorevole. La probabilità cercata risulta:

$$p=\frac{1}{3}.$$

Osserviamo che la domanda posta nel quesito induce intuitivamente a un possibile errore di interpretazione: la risposta intuitiva è che se, per esempio, la prima figlia è femmina, la probabilità che lo sia anche l'altra è il 50%, trattandosi di eventi indipendenti.
Il paradosso, noto come paradosso dei due bambini, fu formulato da Martin Gardner su *Scientific American*.
È certo che uno dei due figli di Anna è femmina, ma nel momento in cui si chiede la probabilità che lo sia «anche l'altro» non si afferma quale dei due è sicuramente femmina.
Di fatto, una possibile riformulazione del problema potrebbe essere la seguente:

«Anna ha due figli Alfa e Beta.

a) Se Alfa è femmina qual è la probabilità che anche Beta sia femmina?
b) Se Alfa oppure Beta è una femmina, qual è la probabilità che anche l'altro sia femmina?»

Nel caso a) ci sono due casi possibili e uno favorevole, quindi la probabilità è pari a $\frac{1}{2}$.
Nel caso b), che è una riformulazione del quesito d'esame, se indichiamo con M e F i sessi dei due figli, sono possibili tre casi (MF, FM, FF) e uno solo di questi soddisfa i requisiti della domanda. La probabilità è quindi $\frac{1}{3}$.

Per approfondire sui paradossi della probabilità si segnalano i seguenti testi:

- Carla Rossi, *La matematica dell'incertezza. Didattica della probabilità e della statistica*, Zanichelli, 1999. A pagina 207 si trova il paradosso del quesito d'esame.
- Bergamini, Trifone, Barozzi, *Matematica blu*, Zanichelli, 2010. Nelle pagine β1 e β19 si trova il paradosso di *Monty Hall*.

8 Vedi lo svolgimento del quesito 8 della prova del corso di ordinamento 2010.

9 Vedi lo svolgimento del quesito 9 della prova del corso di ordinamento 2010.

10 La risposta esatta è B.

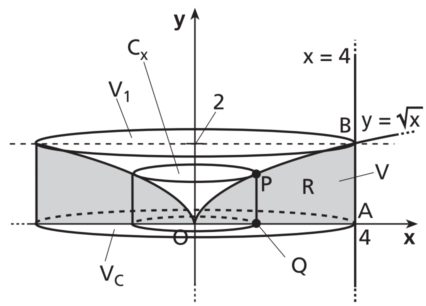
Infatti, il volume del solido generato dalla rotazione della regione R attorno all'asse y (figura 8) può essere ottenuto nel seguente modo. Consideriamo il cilindro C_x ottenuto ruotando attorno all'asse delle y il segmento di estremi $Q(x;\,0)$ e $P(x;\sqrt{x})$, con $0 \le x \le 4$.

La superficie laterale di C_x è $S_x = (2\pi x)\cdot\sqrt{x}$.

Pertanto, il volume di C_x è:

$$V = \int_0^4 S_x\,dx = \int_0^4 (2\pi x)\sqrt{x}\,dx = 2\pi\int_0^4 x^{\frac{3}{2}}\,dx =$$

$$= \frac{4}{5}\pi\left[x^{\frac{5}{2}}\right]_0^4 = \frac{128}{5}\pi.$$



▲ **Figura 8.**

Osserviamo che tale volume si può ottenere anche come differenza tra il volume del cilindro V_C, di raggio OA con $A(4;0)$, e altezza AB con $B(4;2)$, e il volume V_1 del solido, ottenuto dalla rotazione della parte di piano delimitata da, $y = \sqrt{x}$, $y = 2$ e l'asse y. Risulta:

$$V_C = \pi\overline{OA}^2\cdot\overline{AB} = \pi\cdot 4^2\cdot 2 = 32\pi;$$

poiché il volume V_1 è uguale al volume del solido di rotazione intorno all'asse x della regione delimitata dal grafico della funzione $y = x^2$, dall'asse x e da $x = 2$, si trova:

$$V_1 = \pi\int_0^2 (x^2)^2 dx = \pi\int_0^2 x^4 dx = \pi\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2 = \frac{32}{5}\pi.$$

Pertanto il volume V vale:

$$V = V_C - V_1 = 32\pi - \frac{32}{5}\pi = \frac{128}{5}\pi.$$