

## ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO CORSO DI ORDINAMENTO • 2010

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

### ■ PROBLEMA 1

Sia  $ABCD$  un quadrato di lato 1,  $P$  un punto di  $AB$  e  $\gamma$  la circonferenza di centro  $P$  e raggio  $AP$ . Si prenda sul lato  $BC$  un punto  $Q$  in modo che sia il centro di una circonferenza  $\lambda$  passante per  $C$  e tangente esternamente a  $\gamma$ .

1. Se  $AP = x$ , si provi che il raggio di  $\lambda$  in funzione di  $x$  è dato da  $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ .
2. Riferito il piano a un sistema di coordinate  $Oxy$ , si tracci, indipendentemente dalle limitazioni poste a  $x$  dal problema geometrico, il grafico di  $f(x)$ . La funzione  $f(x)$  è invertibile? Se sì, qual è il grafico della sua inversa?
3. Sia  $g(x) = \left| \frac{1-x}{1+x} \right|$ ,  $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ , qual è l'equazione della retta tangente al grafico di  $g(x)$  nel punto  $R(0; 1)$ ? E nel punto  $S(1; 0)$ ? Cosa si può dire della tangente al grafico di  $g(x)$  nel punto  $S$ ?
4. Si calcoli l'area del triangolo mistilineo  $ROS$ , ove l'arco  $RS$  appartiene al grafico di  $f(x)$  o, indifferentemente, di  $g(x)$ .

### ■ PROBLEMA 2

Nel piano, riferito a coordinate cartesiane  $Oxy$ , si consideri la funzione  $f$  definita da  $f(x) = b^x$  ( $b > 0$ ,  $b \neq 1$ ).

1. Sia  $G_b$  il grafico di  $f(x)$  relativo a un assegnato valore di  $b$ . Si illustri come varia  $G_b$  al variare di  $b$ .
2. Sia  $P$  un punto di  $G_b$ . La tangente a  $G_b$  in  $P$  e la parallela per  $P$  all'asse  $y$  intersecano l'asse  $x$  rispettivamente in  $A$  e in  $B$ . Si dimostri che, qualsiasi sia  $P$ , il segmento  $AB$  ha lunghezza costante. Per quali valori di  $b$  la lunghezza di  $AB$  è uguale a 1?
3. Sia  $r$  la retta passante per  $O$  tangente a  $G_e$  ( $e =$  numero di Nepero). Qual è la misura in radianti dell'angolo che la retta  $r$  forma con il semiasse positivo delle ascisse?
4. Si calcoli l'area della regione del primo quadrante delimitata dall'asse  $y$ , da  $G_e$  e dalla retta d'equazione  $y = e$ .

### ■ QUESTIONARIO

1. Sia  $p(x)$  un polinomio di grado  $n$ . Si dimostri che la sua derivata  $n$ -esima è  $p^{(n)}(x) = n!a_n$  dove  $a_n$  è il coefficiente di  $x^n$ .
2. Siano  $ABC$  un triangolo rettangolo in  $A$ ,  $r$  la retta perpendicolare in  $B$  al piano del triangolo e  $P$  un punto di  $r$  distinto da  $B$ . Si dimostri che i tre triangoli  $PAB$ ,  $PBC$ ,  $PCA$  sono triangoli rettangoli.
3. Sia  $\gamma$  il grafico di  $f(x) = e^{3x} + 1$ . Per quale valore di  $x$  la retta tangente a  $\gamma$  in  $(x; f(x))$  ha pendenza uguale a 2?
4. Si calcoli:  $\lim_{x \rightarrow \infty} 4x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ .

- 5** Un serbatoio ha la stessa capacità del massimo cono circolare retto di apotema 80 cm. Qual è la capacità del serbatoio?
- 6** Si determini il dominio della funzione  $f(x) = \sqrt{\cos x}$ .
- 7** Per quale o quali valori di  $k$  la funzione
- $$b(x) = \begin{cases} 3x^2 - 11x - 4, & x \leq 4 \\ kx^2 - 2x - 1, & x > 4 \end{cases}$$
- è continua in  $x = 4$ ?
- 8** Se  $n > 3$  e  $\binom{n}{n-1}, \binom{n}{n-2}, \binom{n}{n-3}$  sono in progressione aritmetica, qual è il valore di  $n$ ?
- 9** Si provi che non esiste un triangolo  $ABC$ , con  $AB = 3$ ,  $AC = 2$  e  $\hat{A}BC = 45^\circ$ . Si provi altresì che se  $AB = 3$ ,  $AC = 2$  e  $\hat{A}BC = 30^\circ$ , allora esistono due triangoli che soddisfano queste condizioni.
- 10** Si consideri la regione delimitata da  $y = \sqrt{x}$ , dall'asse  $x$  e dalla retta  $x = 4$  e si calcoli il volume del solido che essa genera ruotando di un giro completo intorno all'asse  $y$ .

---

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.