ANNO SCOLASTICO 2017/18

SIMULAZIONE DELLA PROVA DI MATEMATICA DELL'ESAME DI STATO

PER IL LICEO SCIENTIFICO

Risoluzione

Problema 1 – In pieno recupero

a. Il profilo del tetto è continuo, simmetrico rispetto all'asse *y*, interseca l'asse *x* in $(-10;0)$ e $(10;0)$ e l'asse *y* in $(0;4)$. Entrambe le funzioni $f_1(x)$ e $f_2(x)$ sono pari, quindi i loro grafici sono simmetrici rispetto all'asse *y*, e intersecano l'asse *x* nei punti $(\pm 10;0)$ e l'asse *y* nel punto $(0;4)$.

Esplicitiamo la funzione $f_1(x)$:

$$f_1(x)=\begin{cases} 4-\sqrt{-\frac{8}{5}x} & \text{se } -10\le x<0 \\ 4-\sqrt{\frac{8}{5}x} & \text{se } 0\le x\le 10 \end{cases}$$

Calcoliamo la sua derivata in $x=0$:

$$f'_1(x)=\begin{cases} \frac{\sqrt{10}}{5\sqrt{-x}} & \text{se } -10<x<0 \\ -\frac{\sqrt{10}}{5\sqrt{x}} & \text{se } 0<x<10 \end{cases}$$

da cui:

$$\lim_{x\to 0^-} f'_1(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{10}}{5\sqrt{-x}}=+\infty; \qquad \lim_{x\to 0^+} f'_1(x)=\lim_{x\to 0^+}-\frac{\sqrt{10}}{5\sqrt{x}}=-\infty.$$

La funzione $f_1(x)$ ammette un punto a tangente verticale in $x=0$, che è una cuspide, mentre il profilo del tetto raffigurato in figura 1 presenta un punto angoloso.

Consideriamo, ora, la funzione:

$$f_2(x)=\begin{cases} \frac{1}{25}(x+10)^2 & \text{se } -10\le x<0 \\ \frac{1}{25}(x-10)^2 & \text{se } 0\le x\le 10 \end{cases}$$

La sua derivata è:

$$f'_2(x)=\begin{cases} \frac{2}{25}(x+10) & \text{se } -10<x<0 \\ \frac{2}{25}(x-10) & \text{se } 0<x<10 \end{cases}$$

© Zanichelli editore, 2018

Questo file è un'estensione dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Graziella Barozzi e Anna Trifone

da cui:

$$\lim_{x\to 0^-} f'_2(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{2}{25}(x+10) = \frac{4}{5}; \qquad \lim_{x\to 0^+} f'_2(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{25}(x-10) = -\frac{4}{5}.$$

La funzione $f_2(x)$ ha un punto angoloso in $x=0$. Inoltre:

- $f'_2(x)<0$ per $0<x<10$, quindi $f_2(x)$ è decrescente in $[0;10]$ e, per simmetria, crescente in $[-10;0]$;
- $f''_2(x)=\frac{2}{25}>0$ per $-10<x<10 \wedge x\neq 0$, quindi $f_2(x)$ ha la concavità rivolta verso l'alto in tutto l'intervallo.

Quindi $f_2(x)$ rappresenta il profilo del tetto meglio di quanto faccia $f_1(x)$.

Le rette tangenti hanno equazione $y=\frac{4}{5}x+4$ e $y=-\frac{4}{5}x+4$.

L'angolo α compreso tra le due tangenti al grafico è ottuso. Il modo più semplice per calcolarlo è raddoppiare l'angolo che ciascuna di tali rette forma con l'asse y.

$$\alpha = 2\left(\frac{\pi}{2} - arctan\frac{4}{5}\right) \text{ ovvero } \alpha° \cong 102°40'.$$

Il volume dell'edificio si può calcolare considerandolo come un solido retto la cui altezza è 30 m e la cui superficie di base è quella rappresentata in figura 1, formata da un rettangolo di area $A_1 = 20 \text{ m}\cdot 8 \text{ m} = 160 \text{ m}^2$ sormontato da una regione di area:

$$A_2 = \int_{-10}^{10} f_2(x)dx = 2\int_0^{10} \frac{1}{25}(x-10)^2\,dx = \frac{2}{25}\int_0^{10}\left(x^2-20x+100\right)dx =$$

$$= \frac{2}{25}\left[\frac{x^3}{3}-10x^2+100x\right]_0^{10} = \frac{2}{25}\left(\frac{1000}{3}-1000+1000\right) = \frac{80}{3} \text{ m}^2.$$

La superficie di base del solido retto misura quindi:

$$A = A_1 + A_2 = 160 + \frac{80}{3} = \frac{560}{3} \text{ m}^2.$$

Il volume dell'edificio è, pertanto:

$$V = A\cdot h = \frac{560}{3}\cdot 30 = 5600 \text{ m}^3.$$

b. In base ai dati deducibili dal grafico, la parabola ha vertice $V(10;5)$ e passa per $A(2;0)$; cerchiamone l'equazione:

- vertice V $\rightarrow$ $y-5=a(x-10)^2$;
- passaggio per A $\rightarrow$ $-5=64a$ $\rightarrow$ $a=-\frac{5}{64}$.

La parabola ha equazione:

$$y = 5-\frac{5}{64}(x-10)^2 \rightarrow y=-\frac{5}{64}x^2+\frac{25}{16}x-\frac{45}{16} \rightarrow y=-\frac{5}{64}\left(x^2-20x+36\right).$$

© Zanichelli editore, 2018

Questo file è un'estensione dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Graziella Barozzi e Anna Trifone

Calcoliamo l'area del palco:

$$A_{palco} = -\frac{5}{64}\int_2^{16}\left(x^2 - 20x + 36\right)dx = -\frac{5}{64}\left[\frac{x^3}{3} - 10x^2 + 36x\right]_2^{16} =$$

$$= -\frac{5}{64}\left(-\frac{1856}{3} - \frac{104}{3}\right) = -\frac{5}{64}\left(-\frac{1960}{3}\right) = \frac{1225}{24}\, m^2 \cong 51\, m^2.$$

Dovendo dare tre mani di vernice, si può ritenere che la superficie da verniciare sia di circa 153 m^2. Dal momento che la resa della vernice, una volta diluita, è di 12 m^2 a barattolo, occorre acquistare:

$$153:12 = 12,75 \quad \rightarrow \quad 13 \text{ barattoli.}$$

Il costo sostenuto per l'acquisto della vernice è di $65 \cdot 13 = 845$ €.
Osserviamo che il dato sulla percentuale di diluizione è un classico "dato distrattore": non serve, infatti, per la risoluzione del problema.

c. Studiamo la funzione $g(x) = |x|\sqrt{1-x^2}$.

- Dominio: $1 - x^2 \ge 0 \quad \rightarrow \quad -1 \le x \le 1$.

La funzione può essere scritta nella forma:

$$g(x) = |x|\sqrt{1-x^2} = \begin{cases} -x\sqrt{1-x^2} & \text{se } -1 \le x < 0 \\ x\sqrt{1-x^2} & \text{se } 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

- La funzione $g(x)$ è pari, in quanto il dominio è simmetrico rispetto all'origine e inoltre:

$$g(-x) = |-x|\sqrt{1-(-x)^2} = |x|\sqrt{1-x^2} = g(x).$$

- Determiniamo le eventuali intersezioni con gli assi:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = g(x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = |x|\sqrt{1-x^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -1 \vee x = 0 \vee x = 1 \end{cases}$$

  Quindi il grafico di $g(x)$ interseca gli assi cartesiani in $(-1;0)$, $(0;0)$, $(1;0)$.
- $g(x)$ è sempre positiva, tranne in $x = 0$ e in $x = \pm 1$ in cui si annulla.
- $g(x)$ è continua nel proprio dominio.
- Studiamo la derivabilità della funzione per $0 \le x \le 1$, ed estendiamo i risultati per simmetria:

$$g'(x) = \sqrt{1-x^2} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x) = \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

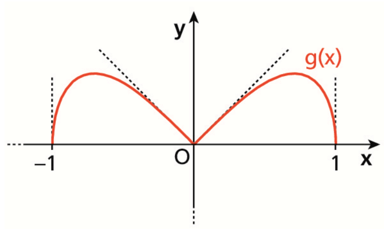
  Osserviamo che:
  - dominio di $g'(x)$: $-1 < x < 1$;
  - $\lim_{x\to 1^-} g'(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{\overbrace{1-2x^2}^{\downarrow\, -1}}{\underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{\downarrow\, 0^+}} = -\infty$, quindi $(1;0)$ è un punto a tangente verticale; per simmetria possiamo affermare che la funzione ammette un punto a tangente verticale anche in $(-1;0)$;

© Zanichelli editore, 2018

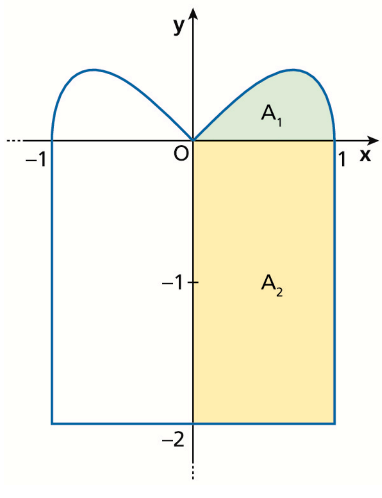
Questo file è un'estensione dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Graziella Barozzi e Anna Trifone

- $\lim\limits_{x\to 0^+} g'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\overbrace{1-2x^2}^{\to 1}}{\underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{\to 1}} = 1$ e, per la parità, $\lim\limits_{x\to 0^-} g'(x) = -1$, quindi la funzione ha un punto angoloso in $O(0;0)$;
- $g'(x) \geq 0 \;\to\; 1-2x^2 \geq 0 \;\to\; x^2 \leq \dfrac{1}{2} \;\to\; 0 \leq x \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$,
  quindi $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ è punto di massimo relativo e $g(x)$ ha un massimo in $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{1}{2}\right)$ e, per simmetria, ha un massimo relativo in $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

Tralasciamo lo studio della derivata seconda e disegniamo il grafico di $g(x)$.



d. Come scritto nel testo del problema, ogni finestra ha la forma di un quadrato di alto 2 m sormontato da una regione il cui profilo è individuato da $g(x)$. Possiamo allora disegnare il contorno della finestra.



Calcoliamo innanzitutto l'area di ciascuna finestra: determiniamo l'area della parte di piano indicata con A_1, delimitata dall'asse x e dal grafico di $g(x)$ per $0 \leq x \leq 1$, sommiamo l'area del rettangolo indicato con A_2 e raddoppiamo il valore così trovato.

$$A_1 = \int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 -2x\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1}\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}+1}\right]_0^1 =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left[\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = -\frac{1}{3}\left(0-1\right) = \frac{1}{3}\ \mathrm{m}^2;$$

$$A_2 = 2\ \mathrm{m}^2;$$

$$Area_{finestra} = 2\left(A_1 + A_2\right) = 2\left(\frac{1}{3}+2\right) = \frac{14}{3}\ \mathrm{m}^2.$$

La superficie totale delle finestre è:

$$A_{tot} = 5\cdot Area_{finestra} = 5\cdot\frac{14}{3} = \frac{70}{3}\,m^2 \cong 23{,}33\,m^2.$$

La spesa da sostenere per il restauro delle 5 finestre è stimata in:

$$Spesa \cong 220\,\frac{€}{m^2}\cdot 23{,}33\,m^2 \cong 5132{,}60\,€\,,$$

da arrotondare a 5130 €.

© Zanichelli editore, 2018

Questo file è un'estensione dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Graziella Barozzi e Anna Trifone

Problema 2

a. Osserviamo che $g_\lambda(x) = x^3(x+\lambda) = x^4 + \lambda x^3$ è una funzione polinomiale, indefinitamente continua e derivabile.
Per avere un flesso in $x=-1$, deve essere $g''_\lambda(-1)=0$, con $g''_\lambda(x)$ di segno opposto prima e dopo $x=-1$.
Calcoliamo:

$$g_\lambda'(x) = 4x^3 + 3\lambda x^2, \qquad g_\lambda''(x) = 12x^2 + 6\lambda x = 6x(2x+\lambda).$$

Annulliamo la derivata seconda in $x=-1$:

$$g_\lambda''(-1) = 0 \quad \to \quad 6(-1)(-2+\lambda) = 0 \quad \to \quad \lambda = 2.$$

La funzione $g_2''(x) = 6x(2x+2) = 12x(x+1)$ ha segno opposto in un intorno di $x=-1$, infatti:

- $g_2''(x) > 0$ per $x < -1 \vee x > 0$;
- $g_2''(x) < 0$ per $-1 < x < 0$;

quindi $x=-1$ è un punto di flesso per la funzione $g_\lambda(x)$ corrispondente a $\lambda = 2$:

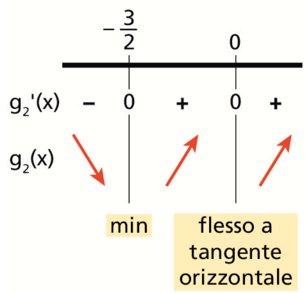
$$g_2(x) = x^4 + 2x^3.$$

b. Studiamo $g_2(x)$ per disegnare il grafico di Γ.

- $g_2(x)$ è definita su R, non è né pari né dispari essendo $g_2(-x) \neq \pm g_2(x)$.
- $\lim_{x\to\pm\infty} g_2(x) = +\infty$, ma $g_2(x)$ non ammette asintoti obliqui essendo un polinomio di quarto grado.
- $g_2(x) \geq 0 \quad \to \quad x^3(x+2) \geq 0 \quad \to \quad x \leq -2 \vee x \geq 0$;
  Γ interseca gli assi cartesiani nell'origine e in $(-2;0)$.
- $g_2'(x) = 4x^3 + 6x^2 = 2x^2(2x+3)$;
  $g_2'(x) < 0$ per $x < -\frac{3}{2}$ e $g_2'(x) > 0$ per $x > -\frac{3}{2} \wedge x \neq 0$.
  Dal quadro dei segni deduciamo che $g_2(x)$ ha un punto di minimo relativo in $x = -\frac{3}{2}$, con

$$g_2\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{8}\left(-\frac{3}{2}+2\right) = -\frac{27}{16},$$

  e un flesso a tangente orizzontale in $x=0$.



  Poiché $\lim_{x\to\pm\infty} g_2(x) = +\infty$, il punto $\left(-\frac{3}{2};-\frac{27}{16}\right)$ è anche minimo assoluto di $g_2(x)$.

- Per quanto ricavato al punto precedente, $g_2(x)$ volge la concavità verso l'alto per $x < -1 \vee x > 0$ e verso il basso per $-1 < x < 0$.
- $x_F = -1$ è un punto di flesso obliquo perché $g'_2(-1) \neq 0$. Calcoliamo:

$$g_2(-1) = (-1)^4 + 2(-1)^3 = -1.$$

  Il flesso F ha coordinate $F(-1;-1)$.

© Zanichelli editore, 2018

Questo file è un'estensione dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Graziella Barozzi e Anna Trifone

La retta t, tangente in F al grafico Γ della funzione $g_2(x)$, ha equazione:

$$y-(-1)=g_2'(-1)[x-(-1)].$$

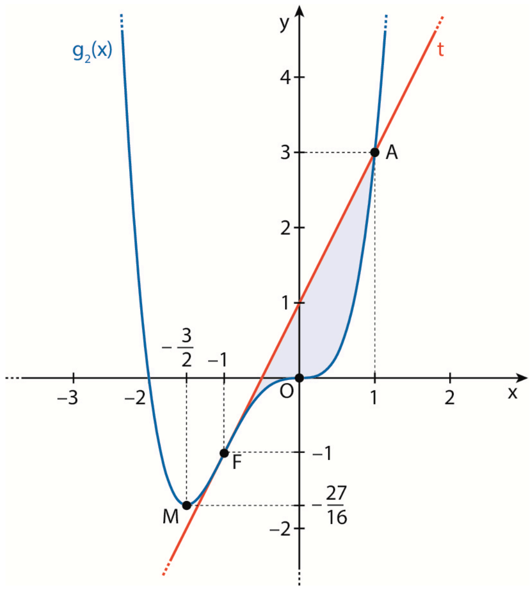
Calcoliamo $g_2'(-1)$:

$$g_2'(-1)=4(-1)^3+6(-1)^2=2.$$

L'equazione di t è:

$$y+1=2(x+1) \quad\to\quad y=2x+1.$$

Disegniamo il grafico Γ e la retta tangente t.



Cerchiamo l'ulteriore punto di intersezione A tra la retta t e il grafico Γ:

$$\begin{cases} y=2x+1 \\ y=x^4+2x^3 \end{cases}$$

L'equazione risolvente

$$x^4+2x^3-2x-1=0$$

ammette certamente la soluzione $x=-1$ con molteplicità almeno 2, dal momento che la curva e la retta sono tangenti in $x=-1$. Osserviamo che:

$$x^4+2x^3-2x-1=(x^4-1)+(2x^3-2x)=(x^2-1)(x^2+1)+2x(x^2-1)=$$
$$=(x^2-1)(x^2+2x+1)=(x-1)(x+1)(x+1)^2=(x-1)(x+1)^3,$$

pertanto le soluzioni dell'equazione risolvente sono:

$$x=-1 \vee x=1,$$

e i punti comuni alle due curve sono F e $A(1;3)$.

Calcoliamo l'area della regione compresa fra la retta t e il grafico Γ:

$$A=\int_{-1}^{1}\left[2x+1-\left(x^4+2x^3\right)\right]dx=\int_{-1}^{1}\left(-x^4-2x^3+2x+1\right)dx=\left[-\frac{x^5}{5}-\frac{1}{2}x^4+x^2+x\right]_{-1}^{1}=$$
$$=\left(-\frac{1}{5}-\frac{1}{2}+1+1\right)-\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2}+1-1\right)=-\frac{2}{5}+2=\frac{8}{5}.$$

© Zanichelli editore, 2018

Questo file è un'estensione dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Graziella Barozzi e Anna Trifone

c. L'ascissa del punto cercato risolve l'equazione $g'_2(x) = 2$, quindi:

$$4x^3 + 6x^2 = 2 \quad \rightarrow \quad 4x^3 + 6x^2 - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad 2(2x^3 + 3x^2 - 1) = 0 \quad \rightarrow \quad 2x^3 + 3x^2 - 1 = 0.$$

Sappiamo che $x = -1$, l'ascissa di *F*, è una soluzione di tale equazione, pertanto $(x+1)$ è un fattore del polinomio a primo membro. Applichiamo il metodo di Ruffini per scomporre il polinomio:

	2	3	0	−1
−1		−2	−1	1
	2	1	−1	0

e riscriviamo l'equazione:

$$(x+1)(2x^2 + x - 1) = 0.$$

Il secondo fattore $2x^2 + x - 1$ è un trinomio particolare; due numeri che hanno somma $s = -\frac{1}{2}$ e prodotto $p = -\frac{1}{2}$ sono -1 e $\frac{1}{2}$, quindi il trinomio si scompone in $2x^2 + x - 1 = 2(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)$.
L'equazione iniziale diventa:

$$2(x+1)^2\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$$

le cui soluzioni sono:
- $x = -1$, che è l'ascissa di *F*;
- $x = \frac{1}{2}$, che è l'ascissa del punto cercato *B*. Per $x = \frac{1}{2}$ è:

$$g_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16} + 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{5}{16} \quad \rightarrow \quad B\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{16}\right).$$

d. La funzione simmetrica di $g_2(x) = x^4 + 2x^3$ rispetto all'asse *y* è la funzione:

$$\varphi(x) = g_2(-x) = x^4 - 2x^3 = x^3(x-2),$$

che corrisponde alla funzione $g_\lambda(x) = x^3(x+\lambda)$ per $\lambda = -2$.

La funzione simmetrica di $g_2(x)$ rispetto all'asse *x*, invece, è data da:

$$\psi(x) = -g_2(x) = -x^4 - 2x^3 = x^3(-x-2),$$

che non si ottiene da $g_\lambda(x)$ per alcun valore di λ. Se così fosse, infatti, dovrebbe essere

$$-x - 2 = x + \lambda \ \forall x \quad \rightarrow \quad \lambda = -2x - 2 \ \forall x, \text{ con } \lambda \text{ costante},$$

e questo è impossibile.

e. La funzione $|g_2(x)|$ è continua in R, perché composizione di funzioni continue, quindi per il Teorema di Torricelli la funzione integrale $G(x) = \int_{-2}^{x} |g_2(t)|\,dt$ è derivabile con derivata:

$$G'(x) = |g_2(x)|, \text{ per ogni } x \in R.$$

© Zanichelli editore, 2018

Questo file è un'estensione dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Graziella Barozzi e Anna Trifone

Dal momento che $G'(x)=|g_2(x)|\geq 0$ per ogni $x\in R$, la funzione $G(x)$ è non decrescente in R; in particolare, $G(x)$ non presenta estremi né relativi né assoluti.

Determiniamo ora i valori richiesti:

- $G(-2)=\int_{-2}^{-2}|g_2(t)|dt=0$ per le proprietà dell'integrale definito;
- $G\left(-\frac{3}{2}\right)=\int_{-2}^{-\frac{3}{2}}|g_2(t)|dt=-\int_{-2}^{-\frac{3}{2}}\left(t^4+2t^3\right)dt=-\left[\frac{1}{5}t^5+\frac{1}{2}t^4\right]_{-2}^{-\frac{3}{2}}=$
  $=-\left[\left(-\frac{1}{5}\cdot\frac{243}{32}+\frac{1}{2}\cdot\frac{81}{16}\right)-\left(-\frac{1}{5}\cdot 32+\frac{1}{2}\cdot 16\right)\right]=\frac{243}{160}-\frac{81}{32}-\frac{32}{5}+8=$
  $=\frac{243-405-1024+1280}{160}=\frac{94}{160}=\frac{47}{80};$
- $G(0)=\int_{-2}^{0}|g_2(t)|dt=-\int_{-2}^{0}\left(t^4+2t^3\right)dt=-\left[\frac{t^5}{5}+\frac{t^4}{2}\right]_{-2}^{0}=-\frac{32}{5}+\frac{16}{2}=\frac{-64+80}{10}=\frac{16}{10}=\frac{8}{5}.$

Gli eventuali punti stazionari di $G(x)$ sono punti di flesso a tangente orizzontale poiché, come determinato prima, $G(x)$ è priva di minimi e massimi relativi. Ricerchiamo tali punti stazionari:

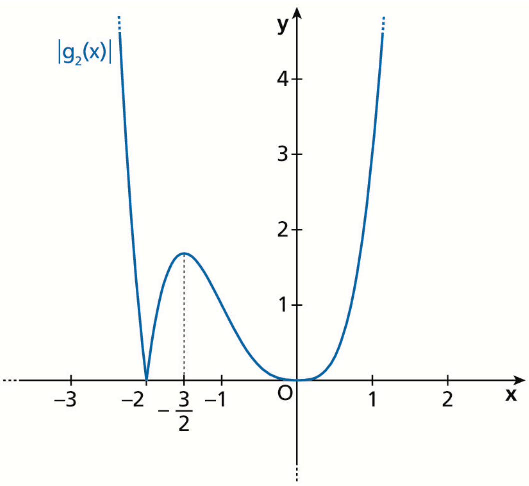
$$G'(x)=0 \quad\to\quad |g_2(x)|=0 \quad\to\quad \left|x^3(x+2)\right|=0 \quad\to\quad x=-2 \vee x=0.$$

Le coordinate dei punti stazionari di $G(x)$ sono: $(-2;G(-2))=(-2;0)$ e $(0;G(0))=\left(0;\frac{8}{5}\right)$.

Per quanto riguarda lo studio della concavità di $G(x)$ osserviamo che da $G'(x)=|g_2(x)|$ discende $G''(x)=D[|g_2(x)|]$, quindi:

- se $|g_2(x)|$ è crescente, $G''(x)>0$ e $G(x)$ volge la concavità verso l'alto;
- se $|g_2(x)|$ è decrescente, $G''(x)<0$ e $G(x)$ volge la concavità verso il basso.

Dal grafico di $g_2(x)$, disegnato prima, ricaviamo il grafico di $|g_2(x)|$ a lato.



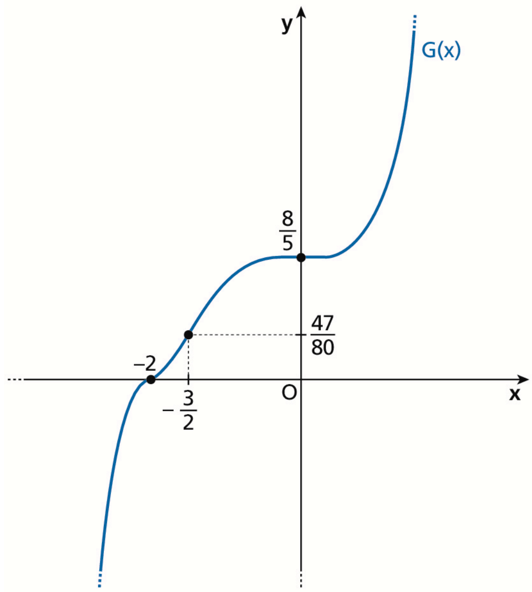
Otteniamo:

- per $-2<x<-\frac{3}{2} \vee x>0$ la funzione $|g_2(x)|$ è crescente e $G(x)$ volge la concavità verso l'alto;
- per $x<-2 \vee -\frac{3}{2}<x<0$ la funzione $|g_2(x)|$ è decrescente e $G(x)$ volge la concavità verso il basso.

Infine ricordiamo che:

- $G(x)$ è derivabile in R, quindi non ha asintoti verticali;
- $G(x)$ è non decrescente in R.

In base ai risultati fin qui ottenuti possiamo tracciare il grafico indicativo della funzione $G(x)$.

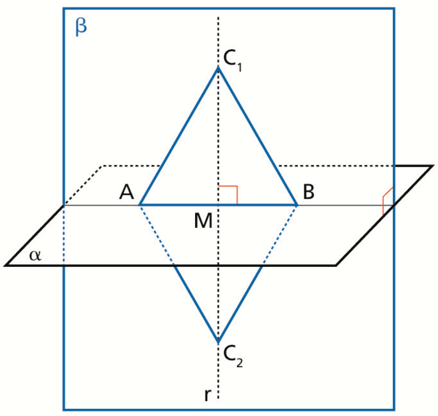


Questionario

1. L'appartenenza dei punti $A(5;1;-2)$ e $B(1;1;2)$ al piano α di equazione $x-2y+z-1=0$ si può verificare per sostituzione diretta:

$$5-2\cdot1+(-2)-1=0 \quad\rightarrow\quad 0=0 \quad\rightarrow\quad A\in\alpha, \qquad 1-2\cdot1+2-1=0 \quad\rightarrow\quad 0=0 \quad\rightarrow\quad B\in\alpha.$$

I punti C_1 e C_2 nel piano β perpendicolare a α e contenente la retta AB tali che i triangoli ABC_1 e ABC_2 siano equilateri appartengono alla retta r perpendicolare a α e passante per il punto medio del segmento AB, cioè il punto $M(3;1;0)$.



© Zanichelli editore, 2018

Questo file è un'estensione dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Graziella Barozzi e Anna Trifone

I coefficienti direttivi della retta *r* sono dati dai coefficienti delle incognite dell'equazione del piano α, per cui l'equazione di *r* in forma parametrica è:

$$r:\begin{cases} x = t+3 \\ y = -2t+1, \text{ con } t \in R, \\ z = t \end{cases}$$

e i punti *C* cercati hanno coordinate del tipo $C(t+3;-2t+1;t)$.

La condizione che i triangoli ABC_1 e ABC_2 siano equilateri implica che le distanze C_1M e C_2M, cioè le altezze relative al lato *AB*, siano tali che:

$$\overline{C_1M} = \overline{C_2M} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{16+16} = 2\sqrt{6},$$

pertanto si deve avere:

$$\overline{CM} = \sqrt{(3-t-3)^2+(1+2t-1)^2+(-t)^2} = \sqrt{t^2+4t^2+t^2} = \sqrt{6t^2} = |t|\sqrt{6} \quad \to$$

$$\to \quad |t|\sqrt{6} = 2\sqrt{6} \quad \to \quad |t| = 2 \quad \to \quad t = \pm 2.$$

Sostituendo nelle coordinate del generico punto *C* troviamo i due punti cercati:

$$\text{per } t=-2,\ C_1(1;5;-2), \qquad \text{per } t=2,\ C_2(5;-3;2).$$

2. La funzione $f(x) = \sqrt{ax^2+bx} - x$ ammette come asintoto obliquo per $x \to +\infty$ la retta di equazione $y = 2x+1$ se sono soddisfatte le seguenti tre condizioni:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{ax^2+bx}-x\right) = \infty, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{ax^2+bx}-x}{x} = 2, \qquad \lim_{x\to+\infty}\left[\left(\sqrt{ax^2+bx}-x\right)-2x\right] = 1.$$

Dalla prima condizione otteniamo:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{ax^2+bx}-x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{ax^2+bx}-x\right)\cdot\frac{\sqrt{ax^2+bx}+x}{\sqrt{ax^2+bx}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(a-1)x^2+bx}{\sqrt{ax^2+bx}+x} = \infty \quad \to \quad a \neq 1.$$

Dalle altre condizioni ricaviamo:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{ax^2+bx}-x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{ax^2+bx}}{x}-1\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cancel{x}\sqrt{a+\frac{b}{x}}}{\cancel{x}}-1\right) = \sqrt{a}-1 = 2 \quad \to \quad a = 9,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+bx}-3x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+bx}-3x\right)\cdot\frac{\sqrt{9x^2+bx}+3x}{\sqrt{9x^2+bx}+3x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{bx}{\sqrt{9x^2+bx}+3x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\cdot b}{\cancel{x}\left(\sqrt{9+\frac{b}{x}}+3\right)} = \frac{b}{6} = 1 \quad \to \quad b = 6.$$

I parametri devono quindi valere $a = 9$ e $b = 6$.

© Zanichelli editore, 2018

Questo file è un'estensione dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Graziella Barozzi e Anna Trifone

3. Le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono entrambe definite per $x \neq 0$. I grafici delle due funzioni sono ortogonali nel loro punto di intersezione *P* se sono perpendicolari le rispettive rette tangenti in *P*. Determiniamo, per le due funzioni assegnate, il punto *P* di intersezione:

$$\begin{cases} y = \dfrac{ax-1}{3x} \\ y = \dfrac{3}{x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{ax-1}{3x} = \dfrac{3}{x} \\ y = \dfrac{3}{x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ax-1 = 9 \\ y = \dfrac{3}{x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{10}{a} \\ y = \dfrac{3}{10}a \end{cases}, \text{ con } a > 0.$$

Calcoliamo le derivate delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$ nel punto *P*:

$$f'(x) = \frac{3ax-(ax-1)3}{9x^2} = \frac{1}{3x^2} \rightarrow f'\left(\frac{10}{a}\right) = \frac{a^2}{300},$$

$$g'(x) = -\frac{3}{x^2} \rightarrow g'\left(\frac{10}{a}\right) = -\frac{3a^2}{100}.$$

Le rette tangenti ai grafici di $f(x)$ e $g(x)$ in *P* sono perpendicolari se:

$$f'\left(\frac{10}{a}\right)\cdot g'\left(\frac{10}{a}\right) = -1 \rightarrow \frac{a^2}{300}\left(-\frac{3a^2}{100}\right) = -1 \rightarrow a^4 = 10^4 \rightarrow a = \pm 10,$$

e poiché *a* deve essere positivo troviamo $a = 10$.
Possiamo ricavare le coordinate di *P* e le equazioni delle rette *r* e *s* tangenti in *P* rispettivamente al grafico di $f(x)$ e $g(x)$:

$$P(1;3);$$

$$r: y = \frac{1}{3}(x-1)+3 \rightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3};$$

$$s: y = -3(x-1)+3 \rightarrow y = -3x+6.$$

4. La funzione $f(x)$ è definita su R. Procediamo nel seguente modo: ricaviamo l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x)$ in un suo generico punto $A(t; f(t))$, con $t \in R$, e imponiamo che tale retta passi per il punto $P(0;k)$.
Calcoliamo la derivata della funzione:

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}} - 2 = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} - 2,$$

osserviamo che è definita su R e ricaviamo l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x)$ in $A(t; f(t))$:

$$y = f'(t)(x-t) + f(t) \rightarrow y = \left(\frac{t}{\sqrt{t^2+3}} - 2\right)(x-t) + \sqrt{t^2+3} - 2t \rightarrow$$

$$\rightarrow y = \left(\frac{t-2\sqrt{t^2+3}}{\sqrt{t^2+3}}\right)x + \frac{3}{\sqrt{t^2+3}}.$$

Il termine $\dfrac{3}{\sqrt{t^2+3}}$ rappresenta l'ordinata all'origine della tangente in $A(t; f(t))$ per ogni $t \in R$.

Imponendo quindi che tale retta tangente passi per il generico punto $P(0;k)$, otteniamo:

$$\frac{3}{\sqrt{t^2+3}} = k \quad \to \quad k > 0.$$

Inoltre vale la seguente catena di disuguaglianze:

$$t^2 \geq 0 \quad \to \quad t^2+3 \geq 3 \quad \to \quad \sqrt{t^2+3} \geq \sqrt{3} \quad \to \quad 0 < \frac{1}{\sqrt{t^2+3}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \to \quad 0 < \frac{3}{\sqrt{t^2+3}} \leq \sqrt{3}.$$

Quindi deve essere:

$$0 < k \leq \sqrt{3},$$

come si doveva dimostrare.

5. La funzione polinomiale $p(x)$ cercata ammette i punti $A(0;1)$, $B(2;2)$ e $C(3;k)$ come estremanti relativi, quindi $x=0$, $x=2$ e $x=3$ devono essere tre zeri della derivata prima $p'(x)$. Poiché il polinomio deve essere di grado minimo, $p'(x)$ sarà esattamente di grado tre e si presenta nella forma:

$$p'(x) = ax(x-2)(x-3), \text{ con } a \neq 0.$$

Procedendo per integrazione, otteniamo:

$$p(x) = \int p'(x)\,dx = \int \left(ax^3 - 5ax^2 + 6ax\right) dx = \frac{1}{4}ax^4 - \frac{5}{3}ax^3 + 3ax^2 + c, \text{ con } c \in ° .$$

Imponiamo che il grafico di $p(x)$ passi per i punti A, B e C:

$$\begin{cases} c = 1 \\ 4a - \dfrac{40}{3}a + 12a + c = 2 \\ \dfrac{81}{4}a - 45a + 27a + c = k \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} c = 1 \\ \dfrac{8}{3}a = 1 \\ k = \dfrac{9}{4}a + 1 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} a = \dfrac{3}{8} \\ c = 1 \\ k = \dfrac{59}{32} \end{cases}$$

Otteniamo dunque la funzione:

$$p(x) = \frac{3}{32}x^4 - \frac{5}{8}x^3 + \frac{9}{8}x^2 + 1$$

e il punto $C\left(3; \dfrac{59}{32}\right)$.

La funzione $p(x)$ ammette sicuramente A, B e C come punti stazionari; dalla derivata prima

$$p'(x) = \frac{3}{8}x(x-2)(x-3)$$

ricaviamo poi il quadro dei segni a lato, verificando così che in effetti A e C sono dei minimi relativi e B un massimo relativo per $p(x)$, come richiesto dal quesito.

La funzione non presenta altri minimi relativi e, poiché $y_A = 1 < y_C = \dfrac{59}{32}$, il minimo assoluto risulta essere $A(0;1)$.

		0		2		3	
x	−	0	+		+		+
x − 2	−		−	0	+		+
x − 3	−		−		−	0	+
p'(x)	−	0	+	0	−	0	+
p(x)	↘		↗		↘		↗
		min		max		min	

6. La funzione integranda $y=\dfrac{e^{x-a}}{\sqrt{x^2+3}}$ è continua su R, quindi per il teorema di Torricelli la funzione integrale $f(x)=\int_a^x \dfrac{e^{t-a}}{\sqrt{t^2+3}}dt$ è derivabile su R ed ha derivata:

$$f'(x)=\frac{e^{x-a}}{\sqrt{x^2+3}}.$$

Poiché risulta $f'(x)>0$ per ogni x, la funzione $f(x)$ è monotona crescente in tutto il suo dominio R.

Affinché una retta possa essere tangente al grafico di $f(x)$ nel punto di ascissa $x=a$, deve avere la seguente equazione:

$$y=\underbrace{f'(a)}_{\downarrow \atop \frac{1}{\sqrt{a^2+3}}}(x-a)+\underbrace{f(a)}_{\downarrow \atop 0} \;\rightarrow\; y=\frac{1}{\sqrt{a^2+3}}(x-a) \;\rightarrow\; y=\frac{1}{\sqrt{a^2+3}}x-\frac{a}{\sqrt{a^2+3}}$$

Valutiamo quale delle due rette proposte può essere scritta in questa forma:

- per $r_1: y=\frac{1}{2}x-1 \;\rightarrow\; \begin{cases}\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{a^2+3}}\\ -1=-\frac{a}{\sqrt{a^2+3}}\end{cases} \;\rightarrow\; \begin{cases}\sqrt{a^2+3}=2\\ \sqrt{a^2+3}=a\end{cases} \rightarrow$ impossibile;
- per $r_2: y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2} \;\rightarrow\; \begin{cases}\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{a^2+3}}\\ -\frac{1}{2}=-\frac{a}{\sqrt{a^2+3}}\end{cases} \;\rightarrow\; \begin{cases}\sqrt{a^2+3}=2\\ \sqrt{a^2+3}=2a\end{cases} \;\rightarrow\; a=1.$

Quindi la retta tangente al grafico di $f(x)$ nel punto di ascissa $x=a=1$ è r_2.

7. Ricaviamo la derivata prima e la derivata seconda della funzione assegnata:

$$y=axe^x+be^x+x,$$
$$y'=ae^x+axe^x+be^x+1,$$
$$y''=2ae^x+axe^x+be^x.$$

Se sostituiamo nell'equazione differenziale data:

$$y''-2y'+y=x-2 \;\rightarrow$$
$$\rightarrow\; \left(2ae^x+axe^x+be^x\right)-2\left(ae^x+axe^x+be^x+1\right)+\left(axe^x+be^x+x\right)=x-2 \;\rightarrow$$
$$\rightarrow\; \cancel{2ae^x}+\cancel{axe^x}+\cancel{be^x}-\cancel{2ae^x}-\cancel{2axe^x}-\cancel{2be^x}-2+\cancel{axe^x}+\cancel{be^x}+x=x-2 \;\rightarrow\; 0=0$$

otteniamo un'identità indipendentemente da a e b, quindi $y(x)$ è soluzione dell'equazione differenziale per ogni valore reale delle costanti a e b.

Per determinare i valori di a e b imponiamo le due condizioni:

$$\begin{cases}y(0)=2\\ y'(0)=0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}a\cdot 0\cdot e^0+be^0+0=2\\ ae^0+a\cdot 0\cdot e^0+be^0+1=0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}b=2\\ a+b+1=0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}a=-3\\ b=2\end{cases}.$$

Questo file è un'estensione dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Graziella Barozzi e Anna Trifone

8.

a. Calcoliamo la probabilità di totalizzare almeno sei punti con 5 lanci come la probabilità dell'evento contrario di totalizzare al massimo cinque punti.
Con 5 lanci il punteggio minimo è cinque, e questo si ottiene se a ogni lancio la moneta dà esito testa e il dado dà esito 1. La probabilità che in un lancio tale evento si verifichi è:
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{12}.$$
Quindi, per la proprietà dell'evento contrario, la probabilità di totalizzare almeno sei punti in 5 lanci è:
$$1-\left(\frac{1}{12}\right)^5=1-\frac{1}{12^5}\cong 1.$$

b. Determiniamo il numero n di volte in cui è uscita testa in 5 lanci, nell'ipotesi che esca sempre 6 col dado e che in tutto si siano totalizzati 42 punti:
$$6n+12(5-n)=42 \quad\to\quad 6n=18 \quad\to\quad n=3.$$
La probabilità cercata è dunque equivalente alla probabilità che su 5 lanci di una moneta, esca tre volte testa e due volte croce. Poiché la distribuzione è binomiale, tale probabilità è:
$$\binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^{5-3}=\binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2}\cdot\frac{1}{32}=\frac{5}{16}=0{,}3125.$$

9. Calcoliamo le derivate di $f(x)=ae^{bx}$ fino alla derivata quarta:
$$f'(x)=abe^{bx},\qquad f''(x)=ab^2e^{bx},\qquad f'''(x)=ab^3e^{bx},\qquad f^{(4)}(x)=ab^4e^{bx}.$$
Imponiamo le condizioni sulle derivate e risolviamo il sistema:
$$\begin{cases}f'(0)=8\\ f^{(4)}(0)=64\end{cases}\to\begin{cases}ab=8\\ ab^4=64\end{cases}\to\begin{cases}ab=8\\ 8b^3=64\end{cases}\to\begin{cases}ab=8\\ b^3=8\end{cases}\to\begin{cases}a=4\\ b=2\end{cases}.$$
La funzione richiesta è $f(x)=4e^{2x}$.

Dimostriamo con il principio di induzione che, per la funzione trovata $f(x)=4e^{2x}$, è $f^{(n)}(x)=2^{n+2}e^{2x}$.

- La formula è valida per $n=1$, infatti:
$$f'(x)=4\cdot2e^{2x}=8e^{2x}=2^3e^{2x}=2^{1+2}e^{2x}.$$
- Supponiamo ora che la formula sia valida per n e dimostriamo la sua validità anche per $n+1$:
$$f^{(n)}(x)=2^{n+2}e^{2x}\quad\to\quad f^{(n+1)}(x)=2^{n+2}\cdot2e^{2x}=2^{n+3}e^{2x}=2^{(n+1)+2}e^{2x}.$$

Quindi $f^{(n)}(x)=2^{n+2}e^{2x}$ per ogni numero naturale *n*.

Sostituiamo le espressioni delle derivate nell'equazione data:
$$f^{(n+1)}(x)=\underbrace{f(0)}_{4}\cdot f^{(n-1)}(x)\quad\to\quad 2^{n+3}e^{2x}=4\cdot2^{n+1}e^{2x}\quad\to\quad 2^{n+3}=2^2\cdot2^{n+1}\quad\to\quad 2^{n+3}=2^{n+3}.$$
Abbiamo trovato un'uguaglianza verificata per ogni n naturale e per ogni x reale, quindi l'equazione data è un'identità per ogni n naturale.

© Zanichelli editore, 2018

Questo file è un'estensione dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Graziella Barozzi e Anna Trifone

10. Il volume del solido ottenuto dalla rotazione di R intorno all'asse x è espresso da:

$$V_x = \pi\int_0^1 \left(kx^2\right)^2 dx = \pi k^2 \int_0^1 x^4 dx = \pi k^2 \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{5}\pi k^2 .$$

Per il metodo dei gusci cilindrici, il volume del solido ottenuto dalla rotazione di R intorno all'asse y è espresso da:

$$V_y = 2\pi\int_0^1 x\left(kx^2\right)dx = 2\pi k\int_0^1 x^3 dx = 2\pi k\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\pi k .$$

Uguagliamo i due volumi:

$$\frac{1}{5}\pi k^2 = \frac{1}{2}\pi k \quad \to \quad \frac{1}{5}k^2 - \frac{1}{2}k = 0 \quad \to \quad \frac{1}{5}k\left(k - \frac{5}{2}\right) = 0 \quad \to \quad k = 0 \vee k = \frac{5}{2}.$$

Poiché per ipotesi deve essere $k > 0$, abbiamo una sola soluzione accettabile: $k = \frac{5}{2}$.

© Zanichelli editore, 2018

Questo file è un'estensione dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Graziella Barozzi e Anna Trifone