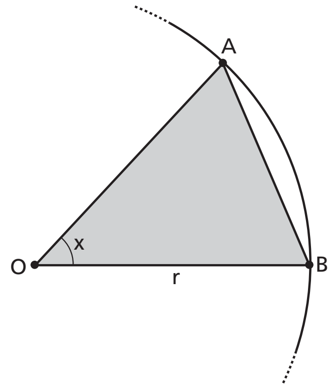
ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2009

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

È assegnato il settore circolare $A\widehat{O}B$ di raggio r e ampiezza x (r e x sono misurati, rispettivamente, in *metri* e *radianti*).

1. Si provi che l'area S compresa fra l'arco e la corda AB è espressa, in funzione di x, da
$S(x) = \frac{1}{2} r^2 (x - \text{sen } x)$ con $x \in [0; 2\pi]$.
2. Si studi come varia $S(x)$ e se ne disegni il grafico (avendo posto $r = 1$).
3. Si fissi l'area del settore $A\widehat{O}B$ pari a 100 m^2. Si trovi il valore di r per il quale è minimo il perimetro di $A\widehat{O}B$ e si esprima il corrispondente valore di x in gradi sessagesimali (è sufficiente l'approssimazione al grado).
4. Sia $r = 2$ e $x = \frac{\pi}{3}$. Il settore $A\widehat{O}B$ è la base di un solido W le cui sezioni ottenute con piani ortogonali a OB sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di W.



▶ **Figura 1.**

PROBLEMA 2

Nel piano riferito a coordinate cartesiane, ortogonali e monometriche, si tracci il grafico G_f della funzione $f(x) = \ln x$ (logaritmo naturale).

1. Sia A il punto d'intersezione con l'asse y della tangente a G_f in un suo punto P. Sia B il punto d'intersezione con l'asse y della parallela per P all'asse x. Si dimostri che, qualsiasi sia P, il segmento AB ha lunghezza costante. Vale la stessa proprietà per il grafico G_g della funzione $g(x) = \log_a x$ con a reale positivo diverso da 1?
2. Sia δ l'inclinazione sull'asse x della retta tangente a G_g nel suo punto di ascissa 1. Per quale valore della base è $\delta = 45°$? E per quale valore di a è $\delta = 135°$?
3. Sia D la regione del primo quadrante delimitata dagli assi coordinati, da G_f e dalla retta d'equazione $y = 1$. Si calcoli l'area di D.
4. Si calcoli il volume del solido generato da D nella rotazione completa attorno alla retta d'equazione $x = -1$.

QUESTIONARIO

1 Si trovi la funzione $f(x)$ la cui derivata è $\operatorname{sen} x$ e il cui grafico passa per il punto $(0; 2)$.

2 Sono dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c\}$. Tra le possibili applicazioni (o funzioni) di A in B, ce ne sono di suriettive? Di iniettive? Di biiettive?

3 Per quale o quali valori di k la curva d'equazione $y = x^3 + kx^2 + 3x - 4$ ha una sola tangente orizzontale?

4 «Esiste solo un poliedro regolare le cui facce sono esagoni». Si dica se questa affermazione è vera o falsa e si fornisca una esauriente spiegazione della risposta.

5 Si considerino le seguenti espressioni:

$$\frac{0}{1},\ \frac{0}{0},\ \frac{1}{0},\ 0^0.$$

A quali di esse è possibile attribuire un valore numerico? Si motivi la risposta.

6 Si calcoli: $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

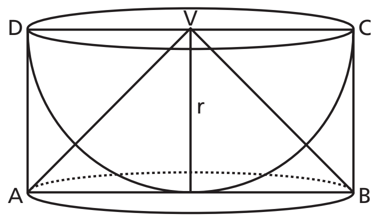
7 Si dimostri l'identità $\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \frac{n-k}{k+1}$ con n e k naturali e $n > k$.

8 Si provi che l'equazione:

$$x^{2009} + 2009x + 1 = 0.$$

ha una radice compresa fra -1 e 0.

9 Nei *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, Galileo Galilei descrive la costruzione di un solido che si chiama *scodella* considerando una semisfera di raggio r e il cilindro a essa circoscritto. La scodella si ottiene togliendo la semisfera dal cilindro. Si dimostri, utilizzando il principio di Cavalieri, che la scodella ha volume pari al cono di vertice V in figura 2.



▶ **Figura 2.**

10 Si determini il periodo della funzione $f(x) = \cos 5x$.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.