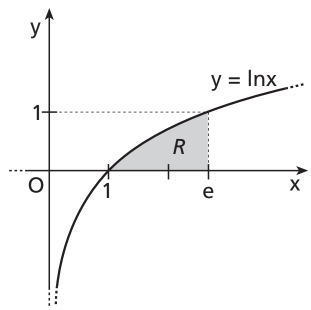
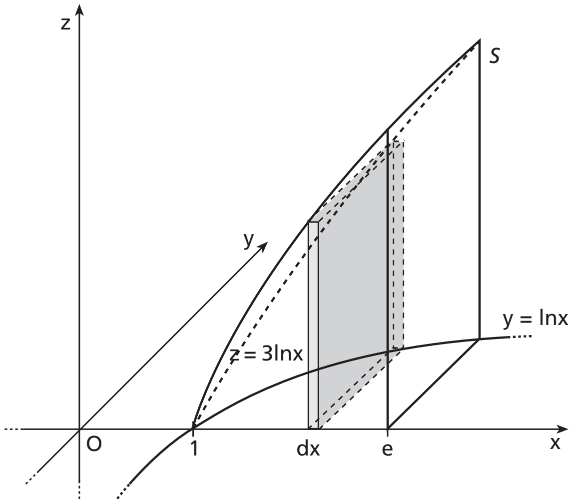
2 La regione del piano racchiusa tra il grafico della funzione $y = \ln x$ e l'asse x, con $1 \leq x \leq e$, è la base di un solido S le cui sezioni, ottenute tagliando S con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte rettangoli aventi l'altezza tripla della base. Si calcoli il volume di S e se ne dia un valore approssimato a meno di 10^{-2}.

2 Nella figura 3 è riportata la regione R di piano compresa tra il grafico della funzione $y = \ln x$ e l'asse x, con $1 \leq x \leq e$.
Si costruisce il solido S con base R avente come sezioni perpendicolari all'asse x rettangoli con altezza tripla rispetto alla base.



▲ **Figura 3.**



◀ **Figura 4.**

Il volume V del solido S può quindi essere visto come la somma integrale di parallelepipedi la cui area di base è $\ln x\,dx$ e l'altezza è $z = 3\ln x$:

$$V = \int_1^e 3\ln^2 x\,dx.$$

Risolviamo l'integrale indefinito per parti

$$\int \ln^2 x\,dx = x\ln^2 x - \int x\ln^2 x - \int x \cdot \frac{2\ln x}{x}\,dx = x\ln^2 x - 2\int \ln^2 x\,dx =$$
$$= x\ln^2 x - 2\left(x\ln x - \int dx\right) = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x.$$

Pertanto

$$V = 3[x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x]_1^e = 3(e - 2e + 2e - 2) = 3(e-2) \simeq 2{,}15.$$