

**ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2007**

■ **PROBLEMA 1**

Sia a un numero reale maggiore di zero e sia g la funzione definita, per ogni $x \in \mathbb{R}$, da: $g(x) = a^x + a^{-x}$.

1. Si dimostri che, se $a \neq 1$, g è strettamente crescente per $x > 0$ e strettamente decrescente per $x < 0$.
2. Posto $a = e$, si disegni il grafico della funzione $f(x) = x^x + e^{-x}$ e si disegni altresì il grafico della funzione $\frac{1}{f(x)}$.
3. Si calcoli $\int_0^t \frac{1}{f(x)} dx$; successivamente, se ne trovi il limite per $t \rightarrow \infty$ e si interpreti geometricamente il risultato.
4. Verificato che il risultato del limite di cui al punto precedente è $\frac{\pi}{4}$, si illustri una procedura numerica che consenta di approssimare tale valore.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2007

PROBLEMA 1

1. Studiamo la derivata di $g(x)$:

$$g'(x) = a^x \ln a - a^{-x} \ln a = \ln a (a^x - a^{-x}) = \ln a \frac{a^{2x} - 1}{a^x}.$$

Poiché a^x è sempre positivo, $g'(x) > 0$ se vale $\ln a (a^{2x} - 1) > 0$.

Se $a > 1$, allora $\ln a > 0$ e, quindi, otteniamo:

$$g'(x) > 0 \rightarrow a^{2x} - 1 > 0 \rightarrow a^{2x} > 1 \rightarrow 2x > 0 \rightarrow x > 0.$$

Se, invece, $0 < a < 1$, allora $\ln a < 0$ e, quindi, otteniamo:

$$g'(x) > 0 \rightarrow a^{2x} - 1 < 0 \rightarrow a^{2x} < 1 \rightarrow 2x > 0 \rightarrow x > 0.$$

Dunque, in entrambi i casi la derivata è strettamente positiva per $x > 0$ e strettamente negativa per $x < 0$. In conclusione g è strettamente crescente per x positiva e strettamente decrescente per x negativa.

2. Il dominio della funzione $f(x) = e^x + e^{-x} \in \mathbb{R}$.

Essa è una funzione pari ed interseca l'asse y nel punto di ordinata 2, mentre non interseca l'asse x . Inoltre è sempre positiva.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty,$$

quindi la funzione non ammette asintoti obliqui.

Dal punto precedente sappiamo che la derivata

$$f'(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^x} \text{ è positiva per } x > 0, \text{ nulla per } x = 0$$

e negativa altrove.

Inoltre $f''(x) = e^x + e^{-x}$, ed è positiva per ogni $x \in \mathbb{R}$.

La funzione ha, quindi, la concavità rivolta sempre verso l'alto. Il grafico di f è in figura 1.

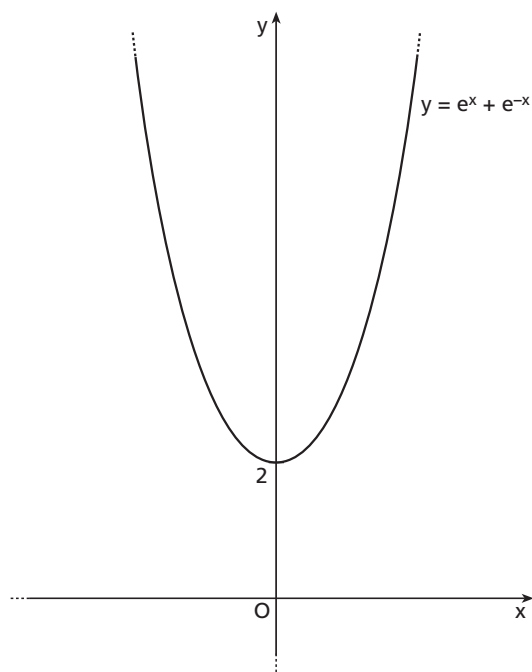
$$\text{Consideriamo ora } b(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{e^x + e^{-x}}.$$

Anch'essa è definita in tutto \mathbb{R} e sempre strettamen-

te positiva. Interseca l'asse y nel punto $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

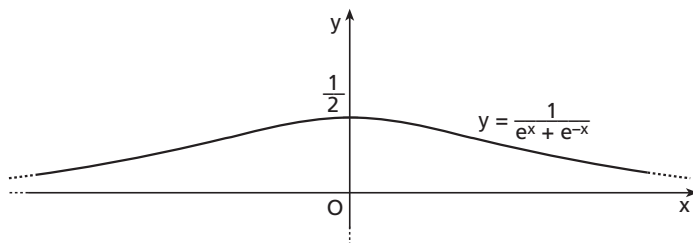
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} b(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$$

quindi l'asse x è asintoto orizzontale. Inoltre, essendo $b(x) = \frac{1}{f(x)}$, vale che b è decrescente dove f è crescente e viceversa.



▲ Figura 1.

Il grafico della funzione $\frac{1}{f(x)}$ è, dunque, il seguente (figura 2).



◀ Figura 2.

3. Effettuando la sostituzione $m = e^x$, si ottiene

$$\int_0^t \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = \int_0^t \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx = \int_0^{e^t} \frac{1}{m^2 + 1} dm = [\arctg m]_1^{e^t} = \arctg e^t - \frac{\pi}{4}.$$

Quindi,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\arctg e^t - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Tale valore rappresenta l'area del sottografico della funzione positiva $b(x)$ per $x > 0$. Tale area risulta finita anche se tale regione è illimitata.

4. Si osservi che:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx = [\arctg x]_0^1 = (\arctg 1 - \arctg 0) = \frac{\pi}{4}.$$

Per il calcolo approssimato di $\frac{\pi}{4}$ si può, quindi, utilizzare il metodo dei rettangoli, dividendo l'intervallo $[0; 1]$ in $n = 6$ parti uguali. Considerando $k(x) = \frac{1}{1 + x^2}$, e tenendo conto che questa è una funzione monotona decrescente per $x > 0$, si ottengono le seguenti approssimazioni per eccesso e per difetto.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} dx &\approx \frac{1-0}{6} \left[k(0) + k\left(\frac{1}{6}\right) + k\left(\frac{2}{6}\right) + k\left(\frac{3}{6}\right) + k\left(\frac{4}{6}\right) + k\left(\frac{5}{6}\right) \right] = \\ &= \frac{1}{6} \left[1 + \frac{36}{37} + \frac{36}{40} + \frac{36}{45} + \frac{36}{52} + \frac{36}{61} \right] \approx 0,83. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} dx &\approx \frac{1-0}{6} \left[k\left(\frac{1}{6}\right) + k\left(\frac{2}{6}\right) + k\left(\frac{3}{6}\right) + k\left(\frac{4}{6}\right) + k\left(\frac{5}{6}\right) + k(1) \right] = \\ &= \frac{1}{6} \left[\frac{36}{37} + \frac{36}{40} + \frac{36}{45} + \frac{36}{52} + \frac{36}{61} + \frac{1}{2} \right] \approx 0,75. \end{aligned}$$

L'errore commesso nell'approssimazione è $\varepsilon = 0,83 - 0,75$ che è anche uguale a $\frac{1}{6}(k(0) - k(1)) \approx 0,08$. Aumentando il numero n si può migliorare l'approssimazione.