7 Determinare la distanza tra il punto $P(2; 1; 1)$ e la retta:

$$\begin{cases} x + y = z + 1 \\ z = -y + 1 \end{cases} .$$

7 Scriviamo la retta r : $\begin{cases} x + y = z + 1 \\ z = -y + 1 \end{cases}$ in forma parametrica, ponendo $y = t$. Otteniamo:

$$\begin{cases} x = -t - t + 1 + 1 \\ y = t \\ z = -t + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -2t + 2 \\ y = t \\ z = -t + 1 \end{cases}.$$

Un vettore di direzione della retta r , e quindi del piano a essa perpendicolare, è $(-2; 1; -1)$.
L'equazione del piano π passante per $P(2; 1; 1)$ e perpendicolare alla retta è dunque:

$$\pi: a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \rightarrow -2(x - 2) + 1(y - 1) - 1(z - 1) = 0 \rightarrow$$

$$2x - y + z - 4 = 0.$$

Calcoliamo le coordinate del punto Q di intersezione tra la retta r e il piano π . Sostituiamo le equazioni parametriche della retta nell'equazione del piano e otteniamo:

$$2(2 - 2t) - (t) + (1 - t) - 4 = 0 \rightarrow t = \frac{1}{6}.$$

$$Q: \begin{cases} x = -\frac{1}{3} + 2 \\ y = \frac{1}{6} \\ z = -\frac{1}{6} + 1 \end{cases} \rightarrow Q: \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = \frac{1}{6} \\ z = \frac{5}{6} \end{cases}.$$

La distanza PQ è la distanza del punto P dalla retta r e vale:

$$\overline{PQ} = \sqrt{\left(2 - \frac{5}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{6}\right)^2 + \left(1 - \frac{5}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{30}{36}} = \frac{\sqrt{30}}{6}.$$