

9 In un riferimento cartesiano nello spazio $Oxyz$, data la retta r di equazioni:

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 1 + t \\ z = kt \end{cases}$$

e il piano P di equazione:

$$x + 2y - z + 2 = 0,$$

determinare per quale valore di k la retta r e il piano P sono paralleli, e la distanza tra di essi.

* La prova è uguale a quella delle scuole italiane all'estero, Americhe, 2015.

- 9 Il vettore direzione della retta r è $\vec{r}(2; 1; k)$, con $k \in \mathbb{R}$, mentre il vettore direzione perpendicolare al piano P è $\vec{p}(1; 2; -1)$. La retta r è parallela al piano P se \vec{r} e \vec{p} sono perpendicolari, cioè se:

$$\vec{r} \cdot \vec{p} = 0 \rightarrow 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + k \cdot (-1) = 0 \rightarrow k = 4.$$

La retta parallela al piano è dunque:

$$r: \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 1 + t \\ z = 4t \end{cases}$$

La distanza fra retta e piano coincide con la distanza di un qualunque punto della retta dal piano; considerato per esempio il punto della retta di coordinate $A(1; 1; 0)$, che si ottiene per $t = 0$, otteniamo:

$$d(r, P) = d(A, P) = \frac{|1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 1 \cdot 0 + 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{6}}.$$