Liceo scientifico e opzione scienze applicate*

4 Nello spazio sono dati due piani α e β rispettivamente di equazione:

α) $x - 3y + z - 5 = 0$

β) $x + 2y - z + 3 = 0$

Dopo aver determinato l'equazione parametrica della retta r da essi individuata verificare che essa appartiene al piano γ di equazione $3x + y - z + 1 = 0$.

* La prova è uguale a quella delle scuole italiane all'estero, Americhe, 2015.

4 I due piani si intersecano lungo una retta perché i coefficienti delle variabili corrispondenti non hanno lo stesso rapporto $\left(\frac{1}{1} \neq \frac{-3}{2}\right)$.

La retta r intersezione di α e β è rappresentata dal sistema formato dalle equazioni dei due piani.

$$r = \alpha \cap \beta = \begin{cases} x - 3y + z - 5 = 0 \\ x + 2y - z + 3 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x = 3y - z + 5 \\ (3y - z + 5) + 2y - z + 3 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x = 3y - z + 5 \\ 5y - 2z + 8 = 0 \end{cases} \to$$

$$\begin{cases} x = 3y - z + 5 \\ y = \frac{2}{5}z - \frac{8}{5} \end{cases} \to \begin{cases} x = 3\left(\frac{2}{5}z - \frac{8}{5}\right) - z + 5 \\ y = \frac{2}{5}z - \frac{8}{5} \end{cases} \to \begin{cases} x = \frac{1}{5}z + \frac{1}{5} \\ y = \frac{2}{5}z - \frac{8}{5} \end{cases}$$

Posto $z = t$, con $t \in \mathbb{R}$, troviamo l'equazione parametrica della retta $r = \alpha \cap \beta$:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{5}t + \frac{1}{5} \\ y = \frac{2}{5}t - \frac{8}{5} \\ z = t \end{cases}$$

Verifichiamo che la retta appartiene al piano γ di equazione $3x + y - z + 1 = 0$; per farlo, sostituiamo a x, y, z nell'equazione del piano le espressioni parametriche di r, e verifichiamo che otteniamo un'identità:

$$3\left(\frac{1}{5}t + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{2}{5}t - \frac{8}{5}\right) - t + 1 = 0 \to \frac{3}{5}t + \frac{3}{5} + \frac{2}{5}t - \frac{8}{5} - t + 1 = 0 \to 0 = 0.$$

Avendo ottenuto un'identità, risulta $r \subset \gamma$.