Liceo scientifico e opzione scienze applicate

7 Determinare le coordinate dei centri delle sfere di raggio $\sqrt{6}$ tangenti al piano π di equazione:

$$x + 2y - z + 1 = 0$$

nel suo punto P di coordinate $(1; 0; 2)$.

7 I centri delle sfere tangenti a $\pi: x+2y-z+1=0$ nel suo punto $P(1; 0; 2)$ appartengono alla retta perpendicolare a π passante per P.
Il vettore perpendicolare a un piano generico di equazione $ax+by+cz+d=0$ è $\vec{n}(a; b; c)$, quindi il vettore perpendicolare a π ha coordinate $\vec{n}(1; 2; -1)$.
I centri delle sfere cercate appartengono quindi alla retta r che ha direzione $\vec{n}(1; 2; -1)$ e che passa per il punto $P(1; 0; 2)$; tale retta ha equazioni parametriche

$$r: \begin{cases} x = 1 + k \\ y = 0 + 2k \\ z = 2 - k \end{cases}.$$

Adesso dobbiamo imporre che il raggio delle sfere sia $\sqrt{6}$, ovvero che la distanza del punto $P(1; 0; 2)$ da un punto generico di r sia $\sqrt{6}$.

$$\sqrt{(1+k-1)^2+(2k-0)^2+(2-k-2)^2} = \sqrt{6} \rightarrow$$

$$k^2+4k^2+k^2 = 6 \rightarrow$$

$$k = \pm 1.$$

Sostituendo k nelle equazioni parametriche di r troviamo i centri cercati:

$$C_1: \begin{cases} x = 2 \\ y = 2, \\ z = 1 \end{cases} \quad C_2: \begin{cases} x = 0 \\ y = -2. \\ z = 3 \end{cases}$$