Liceo scientifico e opzione scienze applicate*

9 Date le rette:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

e il punto $P(1; 0; -2)$ determinare l'equazione del piano passante per P e parallelo alle due rette.

* La prova è uguale a quella delle scuole italiane all'estero, Europa, 2016.

9 Denotiamo con r_1 la retta espressa in forma parametrica e con r_2 quella in forma cartesiana e analizziamo la posizione reciproca tra le due rette e il punto P dato. Osserviamo che P non appartiene né a r_1, né a r_2, infatti, sostituendo a x, y, z, rispettivamente, i valori 1, 0, -2, entrambi i sistemi risultano impossibili. Per vedere se r_1 e r_2 sono coincidenti, incidenti o disgiunte (parallele o sghembe), studiamo il sistema seguente in 5 equazioni e 4 incognite:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \\ x + y + z - 3 = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}.$$

Otteniamo:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \\ t + 2t + t - 3 = 0 \\ 2t - 2t = 0 \end{cases}.$$

da cui:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \\ t = \frac{3}{4} \end{cases}.$$

Poiché esiste ed è unico il valore di t per cui il sistema ha soluzione, possiamo concludere che r_1 ed r_2 sono incidenti e il loro punto d'intersezione è $Q\left(\frac{3}{4}; \frac{3}{2}; \frac{3}{4}\right)$.

Allora esiste un piano σ che contiene r_1 ed r_2. L'equazione del piano π passante per P e parallelo alle due rette è il piano per P parallelo a σ. Per calcolare l'equazione di σ possiamo procedere in due modi diversi.

Primo metodo: Consideriamo un piano generico espresso in forma cartesiana

$$ax + by + cz + d = 0, \qquad \text{con } (a; b; c) \neq (0; 0; 0)$$

e imponiamo il passaggio per r_1 ed r_2. Poiché r_1 ed r_2 sono incidenti e ogni retta è univocamente determinata da due suoi punti, è sufficiente imporre il passaggio del piano per Q, che appartiene ad entrambe, per un altro punto di r_1, ad esempio, $Q_1(0; 0; 0)$, e per un altro punto di r_2, ad esempio, $Q_2(0; 0; 3)$. Quindi studiamo il sistema:

$$\begin{cases} a \cdot \frac{3}{4} + b \cdot \frac{3}{2} + c \cdot \frac{3}{4} + d = 0 \\ a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d = 0 \\ a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 3 + d = 0 \end{cases}$$

da cui $a = -2b$, $c = d = 0$. Scegliendo $b = 1$, otteniamo σ: $2x - y = 0$.

Secondo metodo: Consideriamo il fascio di piani passanti per r_2,

$$\sigma_{\lambda\mu}: \lambda(x+y+z-3)+\mu(2x-y)=0, \qquad \text{con } (\lambda; \mu) \neq (0; 0)$$

e imponiamo il passaggio per r_1. Poiché $Q = r_1 \cap r_2$, $Q_1(0; 0; 0) \in r_1$, per trovare σ, è sufficiente imporre il passaggio di $\sigma_{\lambda\mu}$ per Q_1, cioè studiare il seguente sistema:

$$\begin{cases} \lambda(x+y+z-3)+\mu(2x-y)=0 \\ x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

da cui $\lambda = 0$. Scegliendo $\mu = 1$, otteniamo σ: $2x - y = 0$.
Ricordiamo che un piano $ax+by+cz+d=0$ è perpendicolare al vettore $(a; b; c)$. Nel nostro caso, il piano σ: $2x-y=0$ è perpendicolare al vettore $(2; -1; 0)$. Di conseguenza, il piano π che stiamo cercando, deve essere perpendicolare allo stesso vettore, per poter essere parallelo a σ. Imponendo il passaggio per P:

$$\begin{cases} 2x-y+d=0 \\ x=1 \\ y=0 \\ z=-2 \end{cases}$$

otteniamo $a = 2$; $b = -1$; $c = 0$; $d = -2$, cioè π: $2x - y = 2$.

Alternativamente, scrivendo la retta r_2 in forma parametrica:

$$\begin{cases} x=s \\ y=2s \\ z=3-3s \end{cases}$$

osserviamo che r_2 è parallela al vettore $(1; 2; -3)$. Ricordando che r_1 è parallela al vettore $(1; 2; 1)$, il generico piano passante per P, cioè:

$$a(x-1)+b(y-0)+c(z+2)=0; \qquad \text{con } (a; b; c) \neq (0; 0; 0)$$

è parallelo alle rette r_1 ed r_2 se il vettore $(x-1; y; z+2)$ è parallelo a $(1; 2; 1)$ e $(1; 2; -3)$. E questo è vero se e solo se

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z+2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Sviluppando i calcoli, otteniamo come prima π: $2x - y - 2 = 0$.