

- 5 Una sfera, il cui centro è il punto $K(-2; -1; 2)$, è tangente al piano Π avente equazione $2x - 2y + z - 9 = 0$. Qual è il punto di tangenza? Qual è il raggio della sfera?

* La prova è uguale a quella delle scuole italiane all'estero, Europa, 2016.

5 Determiniamo il punto di tangenza T tra la sfera di centro $K(-2; -1; 2)$ e il piano di equazione $\pi: 2x - 2y + z - 9 = 0$.

Il punto T è l'intersezione tra il piano π e la retta s ortogonale a π che passa per K .

Determiniamo un'equazione vettoriale della retta s .

In generale, se un piano ha equazione $ax + by + cz + d = 0$ il vettore $\vec{n} = (a; b; c)$ è ortogonale al piano. Quindi nel nostro caso il vettore $(2; -2; 1)$ è ortogonale al piano π e un'equazione vettoriale di s quindi è:

$$(x; y; z) = (-2; -1; 2) + t(2; -2; 1)$$

con t numero reale. Scriviamo l'equazione in forma parametrica:

$$\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -1 - 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Sostituiamo nell'equazione del piano π le espressioni trovate per x , y e z :

$$2(-2 + 2t) - 2(-1 - 2t) + (2 + t) - 9 = 0$$

$$-4 + 4t + 2 + 4t + 2 + t - 9 = 0$$

$$t = 1.$$

Per $t = 1$ troviamo il punto $T(0; -3; 3)$, che è il punto di tangenza cercato.

Determiniamo ora il raggio della sfera, ossia la lunghezza del segmento TK :

$$TK = \sqrt{(-2 - 0)^2 + (-1 + 3)^2 + (2 - 3)^2} = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3.$$

La sfera quindi ha raggio 3.

Per completare lo svolgimento, anche se non è esplicitamente richiesto dal quesito, osserviamo che un'equazione della sfera è:

$$(x + 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 9.$$