Liceo scientifico e opzione scienze applicate

9 Dati i punti $A(-2; 0; 1)$, $B(1; 1; 2)$, $C(0; -1; -2)$, $D(1; 1; 0)$, determinare l'equazione del piano α passante per i punti A, B, C e l'equazione della retta passante per D e perpendicolare al piano α.

9 Un generico piano nello spazio ha equazione $ax+by+cz+d=0$ con a, b e c numeri reali non tutti nulli; imponiamo il passaggio di tale piano per i punti $A(-2;0;1)$, $B(1;1;2)$, $C(0;-1;-2)$:

$$\begin{cases}-2a+c+d=0\\ a+b+2c+d=0\\ -b-2c+d=0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}-2a+c+d=0\\ a+(-2c+d)+2c+d=0\\ b=-2c+d\end{cases} \rightarrow \begin{cases}-2a+c+d=0\\ a+2d=0\\ b=-2c+d\end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases}-2(-2d)+c+d=0\\ a=-2d\\ b=-2c+d\end{cases} \rightarrow \begin{cases}5d+c=0\\ a=-2d\\ b=-2c+d\end{cases} \rightarrow \begin{cases}c=-5d\\ a=-2d\\ b=-2c+d\end{cases} \rightarrow \begin{cases}a=-2d\\ b=11d\\ c=-5d\end{cases}.$$

Poiché possiamo scegliere arbitrariamente il valore di d, purché diverso da zero, poniamo $d=1$ e otteniamo:

$$a=-2,\quad b=11,\quad c=-5,\quad d=1.$$

Il piano passante per A, B, C ha dunque equazione:

$$\alpha: -2x+11y-5z+1=0.$$

Il vettore $\vec{v}(-2;11;-5)$, formato dai coefficienti delle incognite dell'equazione del piano α, risulta perpendicolare al piano stesso e costituisce quindi il vettore di direzione delle rette ortogonali ad α. Fra tutte cerchiamo la retta r passante per $D(1;1;0)$, ricorrendo alle equazioni parametriche:

$$r: \begin{cases}x=1-2t\\ y=1+11t,\ \text{con } t\in\mathbb{R}.\\ z=-5t\end{cases}$$

Determiniamo le equazioni cartesiane della retta r:

$$\begin{cases}x=1-2t\\ y=1+11t\\ z=-5t\end{cases} \rightarrow \begin{cases}t=\dfrac{1-x}{2}\\ t=\dfrac{y-1}{11}\\ t=-\dfrac{z}{5}\end{cases} \rightarrow \begin{cases}\dfrac{1-x}{2}=\dfrac{y-1}{11}\\ \dfrac{1-x}{2}=-\dfrac{z}{5}\end{cases} \rightarrow \begin{cases}11x+2y-13=0\\ 5x-2z-5=0\end{cases}.$$