

Q9 2018

- 9 Sono dati, nello spazio tridimensionale, i punti  $A(3; 1; 0)$ ,  $B(3; -1; 2)$ ,  $C(1; 1; 2)$ . Dopo aver verificato che  $ABC$  è un triangolo equilatero e che è contenuto nel piano  $\alpha$  di equazione  $x + y + z - 4 = 0$ , stabilire quali sono i punti  $P$  tali che  $ABCP$  sia un tetraedro regolare.

**9** Per verificare che il triangolo è equilatero, calcoliamo le misure dei lati.

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} = \\ \sqrt{(3 - 3)^2 + (-1 - 1)^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{0 + 4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 + (z_C - z_B)^2} = \\ \sqrt{(1 - 3)^2 + (1 + 1)^2 + (2 - 2)^2} = \sqrt{4 + 4 + 0} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\overline{CA} = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2 + (z_A - z_C)^2} = \\ \sqrt{(3 - 1)^2 + (1 - 1)^2 + (0 - 2)^2} = \sqrt{4 + 0 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Poiché  $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$ , il triangolo  $ABC$  è equilatero.

Per tre punti non allineati passa un solo piano dello spazio, dunque il triangolo  $ABC$  appartiene al piano se e solo se i suoi vertici sono punti del piano. Verifichiamolo.

$$\text{Punto A: } x_A + y_A + z_A - 4 \stackrel{?}{=} 0 \rightarrow 3 + 1 + 0 - 4 \stackrel{?}{=} 0 \rightarrow \text{vero.}$$

$$\text{Punto B: } x_B + y_B + z_B - 4 \stackrel{?}{=} 0 \rightarrow 3 - 1 + 2 - 4 \stackrel{?}{=} 0 \rightarrow \text{vero.}$$

$$\text{Punto C: } x_C + y_C + z_C - 4 \stackrel{?}{=} 0 \rightarrow 1 + 1 + 2 - 4 \stackrel{?}{=} 0 \rightarrow \text{vero.}$$

Il vertice  $P$  del tetraedro appartiene alla retta  $r$  passante per il baricentro  $G$  del triangolo  $ABC$  e perpendico-

lare al piano  $\alpha$ . Le coordinate del baricentro sono:

$$G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}, \frac{y_A+y_B+y_C}{3}, \frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right) \rightarrow$$

$$G\left(\frac{3+3+1}{3}, \frac{1-1+1}{3}, \frac{0+2+2}{3}\right) \rightarrow G\left(\frac{7}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right).$$

Poiché  $\alpha$  ha equazione  $x+y+z-4=0$ , la direzione di  $r$  è data dal vettore  $(l; m; n) = (1; 1; 1)$ , formato dai coefficienti di  $x, y$  e  $z$ . La retta  $r$  ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = x_G + lt \\ y = y_G + mt \\ z = z_G + nt \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{3} + t \\ y = \frac{1}{3} + t \\ z = \frac{4}{3} + t \end{cases} \text{ con } t \in \mathbb{R}.$$

Il punto  $P$  appartiene a  $r$ , quindi le sue coordinate sono del tipo:

$$P\left(\frac{7}{3} + t; \frac{1}{3} + t; \frac{4}{3} + t\right).$$

Possiamo procedere in quattro modi.

#### Metodo 1

Poniamo  $\overline{PA} = \overline{AB}$ , che equivale a  $\overline{PA}^2 = \overline{AB}^2$ .

$$\overline{PA}^2 = \left(\frac{7}{3} + t - 3\right)^2 + \left(\frac{1}{3} + t - 1\right)^2 + \left(\frac{4}{3} + t - 0\right)^2, \overline{AB}^2 = 8 \rightarrow \left(-\frac{2}{3} + t\right)^2 + \left(-\frac{2}{3} + t\right)^2 + \left(\frac{4}{3} + t\right)^2 = 8$$

Risolviamo l'equazione nell'incognita  $t$ .

$$\frac{4}{9} + t^2 - \frac{4}{3}t + \frac{4}{9} + t^2 - \frac{4}{3}t + \frac{16}{9} + t^2 + \frac{8}{3}t = 8 \rightarrow$$

$$3t^2 + \frac{24}{9} = 8 \rightarrow t^2 = \frac{16}{9} \rightarrow t_{1,2} = \pm \frac{4}{3}.$$

$$\text{Se } t_1 = \frac{4}{3}, P_1\left(\frac{7}{3} + \frac{4}{3}; \frac{1}{3} + \frac{4}{3}; \frac{4}{3} + \frac{4}{3}\right) \rightarrow P_1\left(\frac{11}{3}; \frac{5}{3}; \frac{8}{3}\right).$$

$$\text{Se } t_2 = -\frac{4}{3}, P_2\left(\frac{7}{3} - \frac{4}{3}; \frac{1}{3} - \frac{4}{3}; \frac{4}{3} - \frac{4}{3}\right) \rightarrow P_2(1; -1; 0).$$

#### Metodo 2

Calcoliamo  $\overline{PG}$  con il teorema di Pitagora:

$$\overline{PG} = \sqrt{\overline{AP}^2 - \overline{AG}^2}.$$

$ABCP$  è un tetraedro regolare, quindi deve essere  $\overline{AP} = \overline{AB} = 2\sqrt{2}$ . Determiniamo  $\overline{AG}^2$ :

$$\overline{AG}^2 = \left(\frac{7}{3} - 3\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{4}{3} - 0\right)^2 = \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{16}{9} = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}.$$

Dunque:

$$\overline{PG} = \sqrt{\overline{AP}^2 - \overline{AG}^2} = \sqrt{8 - \frac{8}{3}} = \sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

La distanza di  $P$  dal piano  $\alpha$  è:

$$\frac{\left|\frac{7}{3} + t + \frac{1}{3} + t + \frac{4}{3} + t - 4\right|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{|3t|}{\sqrt{3}}.$$

Questa distanza deve essere uguale a  $\overline{PG}$ , cioè:

$$\frac{|3t|}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} \rightarrow |3t| = 4 \rightarrow$$

$$3t = \pm 4 \rightarrow t_1 = \frac{4}{3} \vee t_2 = -\frac{4}{3}.$$

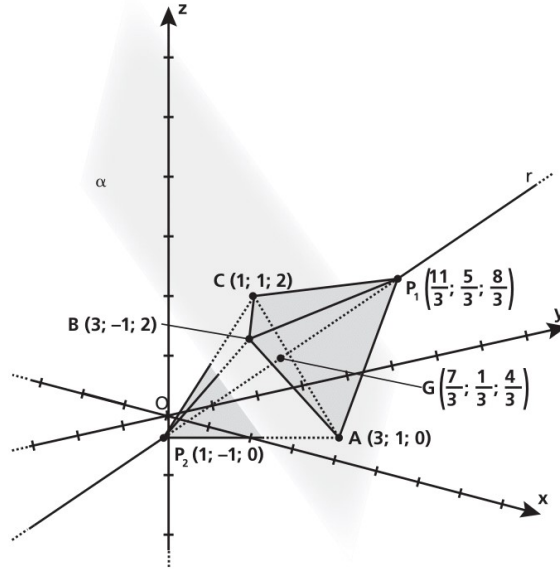
Le coordinate dei punti  $P_1$  e  $P_2$  si determinano come nel **metodo 1**.

### Metodo 3

Consideriamo il generico punto  $P(x; y; z)$ . Affinché il tetraedro sia regolare, deve essere  $\overline{AP} = \overline{BP} = \overline{CP} = \overline{AB}$ , ovvero  $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2 = \overline{CP}^2 = \overline{AB}^2$ . Ciò si traduce nel sistema:

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-0)^2 = 8 \\ (x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 8. \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 8 \end{cases}$$

Risolviendo il sistema si ottengono due soluzioni, che corrispondono alle coordinate dei punti  $P_1$  e  $P_2$  trovati nei metodi precedenti.



■ Figura 19

### Metodo 4

Consideriamo il generico punto  $P(x; y; z)$ . In un tetraedro regolare, l'altezza del triangolo di base deve essere congruente alle altezze delle facce laterali. Poiché le facce sono triangoli equilateri, le altezze coincidono con le mediane. Chiamiamo  $M, N, Q$  i punti medi di  $AB, BC, CA$ . Le loro coordinate sono, rispettivamente:

$$M(3; 0; 1), N(2; 0; 2) \text{ e } Q(2; 1; 1).$$

Calcoliamo  $\overline{CM}$ :

$$\overline{CM} = \sqrt{(1-3)^2 + (1-0)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}.$$

Deve essere  $\overline{PM} = \overline{PN} = \overline{PQ} = \overline{CM}$ , ovvero  $\overline{PM}^2 = \overline{PN}^2 = \overline{PQ}^2 = \overline{CM}^2$ . Dal sistema

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y-0)^2 + (z-1)^2 = 6 \\ (x-2)^2 + (y-0)^2 + (z-2)^2 = 6 \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 6 \end{cases}$$

si ottengono le stesse coordinate dei punti  $P_1$  e  $P_2$  trovati nei metodi precedenti.