Q4 – 2019 straordinaria

Dopo aver verificato che il punto $T(1;\ 0;\ 1)$ appartiene al piano
$\pi:\ x-2y+2z=3$
determinare l'equazione della superficie sferica passante per il punto $P(1;0;5)$ e tangente in T al piano π.

4 Il punto $T(1; 0; 1)$ appartiene al piano $\pi: x - 2y + 2z = 3$ perché sostituendo le sue coordinate nell'equazione, si ottiene $1 - 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 3$ che è un'uguaglianza verificata.
Per la condizione di tangenza, il centro C della superficie sferica appartiene alla retta r passante per il punto T e perpendicolare al piano π.
L'equazione parametrica della retta r è:

$$r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}, \text{ con } t \in \mathbb{R}.$$

Il centro $C(1 + t; -2t; 1 + 2t)$ della superficie sferica è equidistante dai punti T e P. Per trovare t risolviamo l'equazione:

$$\overline{CT}^2 = \overline{CP}^2 \rightarrow \cancel{(1 + t - 1)^2} + \cancel{(-2t)^2} + (1 + 2t - 1)^2 =$$

$$\cancel{(1 + t - 1)^2} + \cancel{(-2t)^2} + (1 + 2t - 5)^2 \rightarrow 4t^2 = 4t^2 + 16 - 16t \rightarrow t = 1,$$

per cui il centro ha coordinate $C(2; -2; 3)$.
In alternativa, avremmo potuto usare il fatto che il centro C della superficie sferica appartiene al piano luogo dei punti dello spazio equidistanti dai punti $T(1; 0; 1)$ e $P(1; 0; 5)$. Tale piano, che chiamiamo α:

- è perpendicolare al vettore $\overline{TP}$ di componenti $(1 - 1; 0 - 0; 5 - 1)$, ovvero $\overline{TP}(0; 0; 4)$, e quindi α è parallelo al piano coordinato Oxy;
- passa per il punto medio di TP, di coordinate $\left(\frac{1+1}{2}; \frac{0+0}{2}; \frac{1+5}{2}\right) = (1; 0; 3)$.

L'equazione del piano α è dunque $z = 3$.
Il punto C si ottiene dall'intersezione tra r e α.
Sostituendo le equazioni parametriche di r nell'equazione di α troviamo: $1 + 2t = 3 \rightarrow t = 1$, per cui il centro ha coordinate $C(2; -2; 3)$.

Il raggio della superficie sferica vale $\overline{CT} = \sqrt{(2-1)^2 + (-2-0)^2 + (3-1)^2} = 3$.

L'equazione della superficie sferica richiesta è pertanto:

$$(x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 3^2 \rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y - 6z + 8 = 0.$$