9 Le parti letterali dei termini dello sviluppo del binomio $(a+b)^{10}$, ordinati secondo le potenze decrescenti di a e crescenti di b, sono rispettivamente:

$$a^{10},\ a^9b,\ a^8b^2,\ a^7b^3,\ a^6b^4,\ a^5b^5,\ a^4b^6,\ a^3b^7,\ a^2b^8,\ ab^9,\ b^{10}.$$

Elencare i loro coefficienti e giustificare in modo esauriente la risposta.

9 Lo sviluppo del binomio $(a+b)^{10}$ si ottiene tramite la formula di Newton:

$$(a+b)^{10}=\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}a^{10-k}b^k.$$

I coefficienti delle parti letterali sono i coefficienti binomiali $\binom{10}{k}$ con $k=0, 1, 2, \ldots, 10$. Pertanto essi risultano ordinatamente:

$$\binom{10}{0}, \binom{10}{1}, \binom{10}{2}, \binom{10}{3}, \binom{10}{4}, \binom{10}{5}, \binom{10}{6}, \binom{10}{7}, \binom{10}{8}, \binom{10}{9}, \binom{10}{10}, \text{ ovvero:}$$

$$1, \quad 10, \quad 45, \quad 120, \quad 210, \quad 252, \quad 210, \quad 120, \quad 45, \quad 10, \quad 1.$$

I coefficienti dello sviluppo si possono ottenere anche attraverso il metodo ricorsivo del triangolo di Tartaglia, sviluppato fino alla decima riga. La caratteristica di tale triangolo, per cui ogni coefficiente è la somma dei due coefficienti della riga precedente a destra e sinistra, è una proprietà dei coefficienti binomiali detta formula di Stifel:

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}.$$