6 Determinare il numero reale a in modo che il valore di

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^a}$$

sia un numero reale non nullo.

6 Osserviamo che se l'esponente a di x^a è un numero reale non intero, x^a è definita per $x > 0$, mentre se $a \in \mathbb{Z}$ allora x^a risulta definita per $x \neq 0$. Il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^a}$$

dovrà quindi essere considerato in un intorno completo di $x = 0$ oppure solamente nell'intorno destro, $x > 0$, a seconda dei casi.
Per $a = 0$ il limite diventa:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^a} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{1} =$$
$$\lim_{x \to 0} (\sin x - x) = \sin 0 - 0 = 0.$$

Pertanto, $a = 0$ non è accettabile.
Per $a < 0$ il limite è finito e risulta uguale a 0.
Per $a > 0$ il limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^a}$$

si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$, perché

$$\lim_{x \to 0} (\sin x - x) = 0 \text{ e } \lim_{x \to 0} x^a = 0.$$

Vediamo se sono verificate le ipotesi del teorema di De L'Hospital. Poniamo $f(x) = \sin x - x$ e $g(x) = x^a$.

- $f(x)$ e $g(x)$ sono continue in 0: $f(x)$ è differenza di funzioni continue in 0 e $g(x)$ è una funzione potenza.
  Inoltre $f(0) = g(0) = 0$.
- $f(x)$ e $g(x)$ sono derivabili in $\mathbb{R}$.
- $g'(x) = a \cdot x^{a-1} \neq 0$ in $\mathbb{R} - \{0\}$.

Le ipotesi del teorema di De L'Hospital sono verificate, quindi possiamo applicarlo per calcolare il limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^a} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{a \cdot x^{a-1}}.$$

Riconduciamo l'ultimo limite al limite notevole

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Pertanto riscriviamo il limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{a \cdot x^{a-1}} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\cos x - 1}{x^2} \cdot \frac{x^2}{a x^{a-1}} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\cos x - 1}{x^2} \cdot \frac{1}{a} x^{3-a} \right).$$

- Se $3 - a > 0$ il limite precedente è 0 e quindi i valori $a < 3$ non sono accettabili.
- Se $3 - a = 0$ il limite diventa

  $$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\cos x - 1}{x^2} \cdot \frac{1}{a} \cdot 1 \right) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}$$

  quindi $a = 3$ è accettabile.
- Se $3 - a < 0$ il limite precedente è infinito, quindi $a > 3$ non è accettabile.

Pertanto l'unico valore di a accettabile è $a = 3$.