Liceo scientifico e opzione scienze applicate*

1 È noto che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}\,.$$

Stabilire se il numero reale u, tale che

$$\int_{-\infty}^{u} e^{-x^2}\,dx = 1$$

è positivo oppure negativo. Determinare inoltre i valori dei seguenti integrali, motivando le risposte:

$$A = \int_{-u}^{u} x^7 e^{-x^2}\,dx, \qquad B = \int_{-u}^{u} e^{-x^2}\,dx, \qquad C = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-5x^2}\,dx.$$

* La prova è uguale a quella delle scuole italiane all'estero, Europa, 2016.

1 Osserviamo innanzitutto che l'integrale indefinito $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ non è risolvibile analiticamente. Di conseguenza, abbozziamo il grafico della funzione $f(x) = e^{-x^2}$.
Osserviamo che la funzione $f(x) = e^{-x^2}$ è una gaussiana centrata nell'origine.
Ricordiamo le sue proprietà.
La funzione è definita e continua su tutto $\mathbb{R}$. È pari perché:

$$f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R},$$

perciò il grafico della funzione è simmetrico rispetto all'asse y. La funzione è positiva su tutto $\mathbb{R}$ perché è una funzione esponenziale. Ha un asintoto orizzontale, $y = 0$, perché $\lim_{x \to \pm\infty} e^{-x^2} = 0$. Infine, $f'(x) = -2xe^{-x^2} > 0$ se e solo se $x < 0$, ovvero la funzione è crescente in $]-\infty; 0[$ e decrescente in $]0; +\infty[$ e assume il suo massimo assoluto in 0.

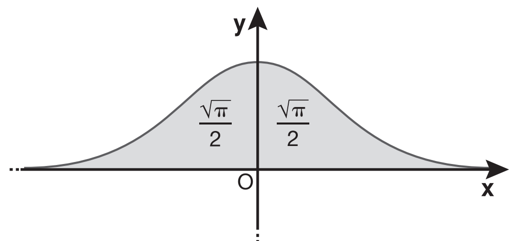

Figura 12

Notiamo che:

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

La funzione $F(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2} dt$ è monotona crescente. Infatti, $F'(x) = e^{-x^2} > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Poiché $F(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ e $F(u) = 1 > \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, quindi $u > 0$.

Determiniamo i valori integrali A, B e C.
Per calcolare l'integrale A, osserviamo che la funzione $f(x) = x^7 e^{-x^2}$ è dispari. Infatti,

$$f(-x) = (-x)^7 e^{-(-x)^2} = -x^7 e^{-x^2} = -f(-x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Possiamo concludere che $\int_{-u}^{+u} x^7 e^{-x^2} dx = 0$

perché $\int_{-u}^{0} x^7 e^{-x^2} dx = -\int_{0}^{u} x^7 e^{-x^2} dx$.

Per calcolare B, possiamo suddividere l'area al di sotto del grafico della funzione in tre parti, aventi area D, B ed E.
Notiamo che $D = E$ per simmetria e che:

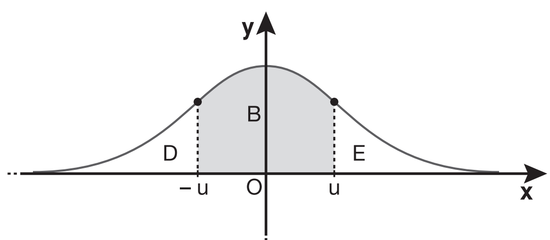

Figura 13

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx - \int_{-\infty}^{u} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} - 1.$$

Di conseguenza:

$$B = \int_{-u}^{u} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx - 2E = \sqrt{\pi} - 2(\sqrt{\pi} - 1) = 2 - \sqrt{\pi}.$$

Calcoliamo l'integrale C:

$$C = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-5x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\sqrt{5}x)^2} dx.$$

Sostituiamo $y=\sqrt{5}\,x \to x=\frac{y}{\sqrt{5}}$, $dx=\frac{dy}{\sqrt{5}}$, per $x\to-\infty$, $y\to-\infty$ e per $x\to+\infty$, $y\to+\infty$.

Quindi:

$$C=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\frac{dy}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}dy=\sqrt{\frac{\pi}{5}}.$$