Liceo scientifico e opzione scienze applicate*

10 Sia f la funzione così definita nell'intervallo $]1; +\infty[$:

$$f(x) = \int_e^{x^2} \frac{t}{\ln t}\,dt.$$

Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel suo punto di ascissa $\sqrt{e}$.

* La prova è uguale a quella delle scuole italiane all'estero, Europa, 2016.

10 L'equazione della retta tangente al grafico di una funzione $y = f(x)$ in un suo punto $(x_0; y_0)$ è della forma:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Nel nostro caso, $x_0 = \sqrt{e}$.
La funzione integrale $y = f(x)$ è continua e derivabile nel suo dominio.
Calcoliamo i valori di y_0 e $f'(x_0)$.
Per calcolare il valore di y_0 sostituiamo il valore $x_0 = \sqrt{e}$ e nell'equazione della funzione:

$$y_0 = f(x_0) = f(\sqrt{e}) = \int_e^e \frac{t}{\ln t} dt = 0.$$

Per calcolare il valore di $f'(x_0)$, calcoliamo la derivata di $y = f(x)$ applicando il teorema fondamentale del calcolo integrale e la regola di derivazione delle funzioni composte:

$$f'(x) = \frac{x^2}{\ln x^2} \cdot 2x = \frac{2x^3}{2 \ln x} = \frac{x^3}{\ln x}.$$

Sostituiamo il valore $x_0 = \sqrt{e}$ nell'equazione della derivata:

$$f'(\sqrt{e}) = \frac{(\sqrt{e})^3}{\ln \sqrt{e}} = \frac{e\sqrt{e}}{\frac{1}{2} \ln e} = 2e\sqrt{e}.$$

L'equazione della retta tangente al grafico della funzione $y = f(x)$ nel punto $(\sqrt{e}; 0)$ è:

$$y - 0 = 2e\sqrt{e}(x - \sqrt{e}) \rightarrow y = 2e\sqrt{e}\, x - 2e^2.$$