Liceo scientifico e opzione scienze applicate

1 Si consideri questa equazione differenziale: $y'' + 2y' + 2y = x$. Quale delle seguenti funzioni ne è una soluzione? Si giustifichi la risposta.

a. $y = e^{-x}(\sin x + \cos x) + x$;

b. $y = 2e^{-x} + x$;

c. $y = e^{-x}(\sin x + \cos x) + \frac{1}{2}(x - 1)$;

d. $y = e^{-2x} + x$.

1 $y'' + 2y' + 2y = x$ è un'equazione differenziale del secondo ordine lineare a coefficienti costanti non omogenea.
Ricordiamo che la soluzione generale y dell'equazione $y'' + by' + cy = r(x)$ si ottiene addizionando a una sua soluzione particolare la soluzione generale dell'equazione omogenea associata $y'' + by' + cy = 0$.
Scriviamo l'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata e cerchiamo le sue soluzioni:

$$k^2 + 2k + 2 = 0 \to k_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm \sqrt{-1} = -1 \pm i.$$

L'integrale generale può esprimersi nella forma: $y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$.
Nel nostro caso: $\alpha = -1$ e $\beta = 1$.
Quindi: $y = e^{-x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$. Poniamo $c_1 = c_2 = 1$ e otteniamo la prima parte della soluzione:

$$y = e^{-x}(\cos x + \sin x).$$

Quindi le funzioni b) e d) non possono essere soluzione.
Ci concentriamo ora sulla parte polinomiale della soluzione.

Consideriamo per esempio $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)$, il secondo termine della funzione proposta c).

Calcoliamo $f'(x) = \frac{1}{2}$ e $f''(x) = 0$ e sostituiamo nell'equazione differenziale:

$$y'' + 2y' + 2y = x.$$

Otteniamo:

$$0 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2}(x-1) = x \to 1 + x - 1 = x.$$

Poiché si tratta di una identità, la risposta c) è corretta.

Mostriamo infine che anche la funzione proposta a) non è soluzione.
Considerato $f(x) = x$, il secondo termine della soluzione a), abbiamo:

$$f'(x) = 1 \text{ e } f''(x) = 0.$$

Sostituendo in $y'' + 2y' + 2y = x$ otteniamo:

$$0 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot x = x \ \to \ 2 + 2x = x \ \to \ x = -2$$

che non è un'identità, quindi la funzione a) non è soluzione.