6 Determinare la soluzione particolare della equazione differenziale $y' - x = xy$, verificante la condizione iniziale $y(0) = 2$.

6 L'equazione differenziale data $y' - x = xy$ è un'equazione differenziale a variabili separabili, perché può essere scritta nella forma:

$$y' = xy + x \;\rightarrow\; y' = x(y+1).$$

Calcoliamo una soluzione generale dell'equazione:

$$\frac{dy}{dx} = x(y+1) \;\rightarrow\; \frac{1}{1+y}dy = xdx \text{ con } y \neq -1.$$

Integriamo entrambi i membri:

$$\int \frac{1}{1+y}dy = \int xdx \;\rightarrow\; \ln|1+y| = \frac{1}{2}x^2 + c \;\rightarrow\; |1+y| = e^{\frac{1}{2}x^2+c} \;\rightarrow\; y = \pm e^{\frac{1}{2}x^2+c} - 1 \;\rightarrow$$

$$y = \pm e^c \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} - 1 \;\rightarrow\; y = ke^{\frac{1}{2}x^2} - 1,$$

dove abbiamo posto $k = \pm e^c$, quindi $k \neq 0$ perché $e^c > 0$.
Se $y = -1$, l'equazione differenziale diventa $0 = 0$, quindi $y = -1$ è soluzione.
La soluzione generale è allora $y = ke^{\frac{1}{2}x^2} - 1$, con k positivo, negativo o nullo.
Cerchiamo la soluzione particolare, imponendo la condizione $y(0) = 2$:

$$2 = ke^{\frac{1}{2}0^2} - 1 \;\rightarrow\; 2 = k - 1 \;\rightarrow\; k = 3.$$

La soluzione cercata ha espressione analitica:

$$y = 3e^{\frac{1}{2}x^2} - 1.$$